Pomiar wartości stałej Stefana-Boltzmanna

I.	Cel ćwiczenia:	wyznaczenie wartości stałej Stefana-Boltzmanna, zapoznanie z teorią promieniowania ciała doskonale czarnego.
II.	Przyrządy:	żarówka, amperomierz, woltomierz, zasilacz 0 ÷ 10 V, mikroskop do pomiaru średnicy włókna żarówki, płytka mikrometryczna do skalowania mikroskopu.
III.	Literatura:	1. J. L. Kacperski, I pracownia fizyczna, WUŁ Łódź 1998.

IV. Wstęp

Praktycznym przybliżeniem ciała czarnego jest wnęka zaopatrzona w mały otwór, tak że promieniowanie dociera do otworu po wielokrotnych odbiciach od ścian wnęki. Promieniowanie wnęki tym bardziej przypomina promieniowanie ciała czarnego, im większa jest objętość wnęki V i im mniejsza powierzchnia otworu A ($V \to \infty$, $A \to 0$).

Jeśli przez u_ν oznaczyć gęstość energii emitowanej przez ciało czarne w zakresie częstości od ν do $\nu + d\nu$, wówczas całkowita gęstość energii, tzn. energia unoszona przez fale w całym zakresie częstości (długości) w jednostce objętości, wyniesie:

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu \tag{1}$$

Do jednostkowej powierzchni wnęki z kąta bryłowego dω dociera w jednostce czasu energia:

$$\frac{uc\cos\theta\, d\omega}{4\pi} \tag{2}$$

gdzie θ oznacza kąt pomiędzy kierunkiem „wiązki” a powierzchnią ścianki. Czynnik $c/4\pi$ odnosi się do izotropowego promieniowania rozchodzącego się z prędkością c (c oznacza prędkość światła).

W momencie odbicia światła od ścianki jest jej przekazywany pęd równy podwojonej składowej pędu promieniowania, prostopadłej do ścianki. Wykorzystując związek $E = pc$, zachodzący pomiędzy energią i pędem fotonów, przekaz pędu można zapisać w postaci:

$$\Delta p = \frac{u\cos^2\theta}{2\pi} d\omega \tag{3}$$

Całkując to równanie po przedstawieniu elementu kąta bryłowego dω w dogodnej do obliczeń postaci:

$$d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = -d(\cos\theta) d\varphi\,,$$

otrzymamy wyrażenie na ciśnienie wywierane przez promieniowanie:

$$p = \frac{u}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \cos^2\theta\, d(\cos\theta) = \frac{u}{3} \tag{4}$$

Zauważmy, że wnęka zawierająca promieniowanie przypomina naczynie z gazem. Jeśli jedną ze ścianek zastąpić przez ruchomy tłok, do opisu przemian „gazu fotonowego" można zastosować zasady termodynamiki:

$$TdS = dW + pdV \tag{5}$$

gdzie T oznacza temperaturę bezwzględną, S – entropię, p – ciśnienie, a W = uV – energię „gazu".

Ponieważ W zależy tylko od temperatury, po uwzględnieniu wzoru (4) otrzymamy następujące wyrażenie opisujące zmianę entropii dS = dS(V,T) przy przesuwaniu tłoka:

$$dS = \frac{udV}{T} + \frac{V}{T}du + \frac{u}{3T}dV = \frac{V}{T}\frac{du}{dT}dT + \frac{4u}{3T}dV \qquad (6($$

Ponieważ z definicji

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T}dT + \frac{\partial S}{\partial V}dV \tag{7}$$

z porównania dwu wyrażeń otrzymamy związki:

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{V}{T}\frac{du}{dT} \tag{8a}$$

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{4u}{3T} \tag{8b}$$

Wobec tego

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{1}{T}\frac{du}{dT} \tag{9a}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{4}{3T}\frac{du}{dT} - \frac{4}{3}\frac{u}{T^2} \tag{9b}$$

(pamiętamy ciągle, że u nie zależy od objętości).

Z porównania (9a) i (9b) otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$\frac{du}{u} = 4\frac{dT}{T} \tag{10}$$

i jako rozwiązanie, związek pomiędzy całkowitą gęstością promieniowania wnęki i temperaturą:

$$u = \alpha T^4 \tag{11}$$

Znajdźmy teraz moc wypromieniowaną przez jednostkę powierzchni ciała czarnego, jest to bowiem wielkość, która będzie badana w doświadczeniu. Niech ciało czarne emituje promieniowanie izotropowo w kąt bryłowy 2π. Rozpatrzmy element kąta bryłowego $d\Omega$, odpowiadający wszystkim możliwym kątom azymutalnym φ (od 0 do 2π) oraz kątom zenitalnym zawartym w przedziale od θ do $\theta + d\theta$;

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta \, d\theta \tag{12}$$

W ten kąt bryłowy emitowane jest z jednostkowej powierzchni promieniowanie o mocy:

$$dE = \frac{uc}{4\pi} 2\pi \sin\theta \, d\theta \cos\theta = \frac{uc}{2}\sin\theta d(\sin\theta) \tag{13}$$

Jeśli wyobrazić sobie, że energia fotonów w gazie fotonowym, podobnie jak zwykłego gazu, jest proporcjonalna do temperatury gazu oraz, że foton zajmuje objętość sześcianu o krawędzi proporcjonalnej do λ , wówczas ze związku pomiędzy energią fotonu: $E = h\nu = hc/\lambda \sim T$ i zajmowaną objętością $\sim \lambda^3$ otrzymamy na gęstość objętościową energii wyrażenie:

$$\rho_E \sim \frac{E}{\lambda^3} \sim \lambda^{-4} \sim T^4$$

odpowiadające jakościowo prawu Stefana-Boltzmanna.

Po scałkowaniu wzoru (13) znajdujemy całkowitą moc emitowaną przez jednostkę powierzchni ciała czarnego:

$$E = \frac{uc}{2}\int_0^1 \sin\theta \, d(\sin\theta) = \frac{uc}{4} \tag{14}$$

Połączenie tego wyniku z równaniem (11) prowadzi do związku pomiędzy mocą emitowaną i temperaturą bezwzględną:

$$E = \frac{\alpha c}{4} T^4 = \sigma T^4, \quad \text{gdzie} \quad \sigma = \frac{\alpha c}{4} \tag{15}$$

otrzymanego empiryczne przez Stefana w 1879 r. i nazywanego prawem Stefana-Boltzmanna. Dokładniej prawo należałoby zapisać w postaci:

$$E = \sigma e T^4 \tag{16}$$

gdzie e, mogące przyjmować wartości od 0 do 1, w zależności od emitującej powierzchni, jest tzw. zdolnością emisyjną. Dla ciała czarnego albo, jak się zwykle mówi, „doskonale czarnego”, e = 1.

Chociaż związki (4) i (11) można otrzymać klasyczne, to nie jest możliwe przewidzenie na podstawie fizyki klasycznej wartości stałej S–B. Jak wiadomo, wzór opisujący poprawnie promieniowanie ciała czarnego otrzymał w 1900 r. Planck, po wprowadzeniu słynnego postulatu mówiącego o „ziarnistości” energii emitowanej przez oscylator:

$$E_n = nh\nu \qquad \text{(n jest liczbą naturalną)} \tag{17}$$

gdzie h jest nową stałą, nazwaną później stałą Plancka.

Prawo Plancka:

$$u_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{\sigma^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \tag{18}$$

wykorzystamy do otrzymania teoretycznej wartości stałej σ; w tym celu należy scałkować wzór (18) ze względu na częstość ν:

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu = \frac{8\pi h}{\sigma^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \tag{19}$$

Po zamianie zmiennych:

$$x = \frac{h\nu}{kT}; \qquad d\nu = \frac{kT}{h} dx;$$

$$u = \frac{8\pi (kT)^4}{(hc)^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \tag{20}$$

Występująca tutaj całka należy do tzw. całek eliptycznych: jej wartość, którą można znaleźć w odpowiednich tablicach, wynosi $\pi^4/15$. Wobec tego:

$$u = \frac{8\pi^5 (kT)^4}{15 h^3 c^3} = \alpha T^4 \tag{21}$$

i zgodnie ze wzorem (15):

$$\sigma = \frac{\alpha c}{4} = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} \tag{22}$$

Znając doświadczalną wartość σ oraz stałej Boltzmanna $k = R/N_o$ (R – stała gazowa, N_o – stała Avogadro), Planck mógł znaleźć wartość liczbową swojej tzw. „stałej działania” h. Zamiast tego wykorzystał dodatkowo prawo Wiena, również zawierające h i k i dzięki temu mógł wyznaczyć wartości obu stałych niezależnie od siebie. Z kolei znajomość k posłużyła Planckowi do znalezienia (na podstawie prawa elektrolizy Faradaya) wartości ładunku elektronu, mniejszej o zaledwie 2% od przyjmowanej obecnie. Wspomnijmy tutaj, że słynne doświadczenie Millikana zostało wykonane dopiero w 1909 r, a otrzymana wówczas wartość ładunku elementarnego była mniejsza od znanej obecnie o 0,4% (przyczyną było wykorzystanie przez Millikana zaniżonej wartości współczynnika lepkości powietrza).

Wstępowi do doświadczenia poświęciliśmy tak wiele miejsca ze względu na znaczenie zagadnienia promieniowania ciała czarnego dla rozwoju fizyki współczesnej, a także dlatego, że ukazuje ono związki zachodzące pomiędzy stałymi fizycznymi: niektóre z tych stałych są szczególnie „fundamentalne”. Na przykład stała Plancka jest bardziej „fundamentalna” od stałej Stefana-Boltzmanna nie tylko dlatego, że prawo S-B okazało się być konsekwencją prawa Plancka, lecz również dlatego, że stała h występuje powszechnie na najgłębszym poziomie naszej znajomości materii – poziomie cząstek elementarnych, podczas gdy σ ma znaczenie raczej „makroskopowe”.

V. Metoda pomiaru

Rolę ciała doskonale czarnego spełnia w doświadczeniu włókno żarówki, do którego doprowadzana jest moc P = UI (U oznacza napięcie na końcach włókna, I – natężenie prądu). Jeśli przyjąć, że moc ta w całości zostaje wypromieniowana, związek (16) można zapisać w postaci:

$$P = A\sigma\left(T^4 - T_o^4\right) = \sigma A T^4 \qquad \text{dla} \qquad T >> T_o \tag{23}$$

gdzie A jest powierzchnią włókna, T_o – temperaturą otoczenia.

Załóżmy, że opór włókna zależy liniowo od temperatury (por. ćw. E-6): $R = R_o T/T_o$, gdzie R_o oznacza opór włókna w temperaturze panującej w laboratorium. Dzięki temu związkowi pomiar oporu pozwoli w prosty sposób określić temperaturę włókna (metoda znalazła zastosowanie przy konstrukcji termometrów oporowych):

$$T = \frac{R T_o}{R_o} \tag{24}$$

Zakładamy tutaj, że temperatura włókna na całej długości jest jednakowa (w rzeczywistości miejsca zamocowania są chłodniejsze od pozostałych części). Po podstawieniu ostatniego związku do wzoru (23) otrzymamy:

$$P = A\sigma R \frac{4T_o^4}{R_o^4} \tag{25}$$

VI. Pomiary

Układ pomiarowy przedstawiony jest na rys.1. Opór żarówki w temperaturze T wyznaczyć można korzystając z prawa Ohma: R = U/I. Ostatecznie otrzymujemy następującą zależność pomiędzy prądem płynącym przez włókno i napięciem zasilającym:

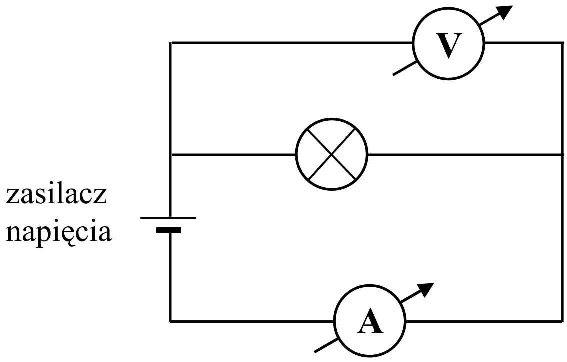
$$I = \left[\pi d l \sigma \left(\frac{T_o}{R_o}\right)^4\right]^{1/5} U^{3/5} \tag{26}$$

(d i *l* oznaczają odpowiednio średnicę i długość włókna).
Jest to zależność potęgowa:

$$I = KU^{3/5} \tag{26a}$$

gdzie:

$$K = \left[\pi d l \sigma \left(\frac{T_o}{R_o}\right)^4\right]^{1/5} \tag{26b}$$



Rys. 1 Układ do badania temperaturowej zależności oporności włókna żarówki

Po zlogarytmowaniu obu stron wzoru (26a) otrzymamy związek liniowy:

$$y = a + bx \tag{27a}$$

gdzie:

$$a = \lg K, \quad b = \frac{3}{5}, \quad y = \lg I, \quad x = \lg U \tag{27b}$$

Pomiary polegają na doświadczalnym zbadaniu zależności (26), tzn. na zmierzeniu natężenia prądu płynącego przez włókno żarówki przy różnych napięciach zasilających, zmienianych pokrętłem regulacji napięcia na zasilaczu. Należy więc:

1. Zmierzyć natężenie prądu I płynącego przez żarówkę dla kilku napięć zasilających (nie przekraczać parametrów nominalnych żarówki).
2. Zmierzyć średnicę włókna żarówki, używając mikroskopu (pomiaru dokonujemy na próbce włókna tego samego typu jakiej użyto w pomiarach).
   Podziałkę ekranu mikroskopu wyskalować używając płytki mikrometrycznej (działka elementarna skali mikrometrycznej wynosi 0,01 mm).
3. Zmierzyć opór R_o badanego włókna żarówki w temperaturze pokojowej.
   Do tego celu używamy omomierza cyfrowego, ponieważ prąd płynący przez badane włókno nie powoduje wówczas zauważalnej zmiany jego temperatury.
4. Dokonać „nieniszczącego" pomiaru pośredniego długości *l* włókna. Pomiar polega na określeniu długości włókna ze związku między długością włókna, powierzchnią przekroju porzecznego, oporem właściwym materiału (odczytanym z tablic, przyjmujemy, że jest to wolfram):

$$l = \frac{R_o S}{\rho} = \frac{\pi R_o d^2}{4\rho} \tag{28}$$

VII. Opracowanie

1. Zlogarytmować wartości natężenia prądu I i napięcia U. Sporządzić wykres lg(I) w funkcji lg(U). Oczekiwaną zależnością jest prosta postaci $y = a + bx$ (patrz zależność (27a) i (27b)).

Wartość rzędnej a = lg K można znaleźć metodą najmniejszych kwadratów lub graficznie. Użycie papieru „logarytmicznego" umożliwia bezpośrednie odczytanie lg K z wykresu.

2. Znając K, w oparciu o (26b), znaleźć wartość stałej Stefana-Boltzmanna:

$$\sigma = \frac{K^5}{\pi d l}\left(\frac{R_o}{T_o}\right)^4$$

3. Porównać wynik z wartością przewidywaną przez wzór (22).

4. Ocenić niepewność pomiarową wyznaczonej wartości σ, obliczając ją ze wzoru:

$$\Delta\sigma = \pm\sigma\left(5\frac{\Delta K}{K} + 4\frac{\Delta R_o}{R_o} + 4\frac{\Delta T_o}{T_o} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta l}{l}\right)$$

gdzie ΔR_o, ΔT_o, Δd są niepewnościami pomiaru odpowiednio oporu włókna, temperatury otoczenia i średnicy włókna żarówki.

Niepewność względną pomiaru długości l włókna otrzymuje się ze wzoru (patrz zależność (28)):

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta R_o}{R_o} + 2\frac{\Delta d}{d}$$

Pomijamy tutaj wpływ niepewności $\Delta\rho$ na tę wartość.

Metodą najmniejszych kwadratów wyznacza się również niepewności Δa i Δb parametrów prostej. Wówczas dwóm wartościom logarytmów $(a + \Delta a)$ i $(a - \Delta a)$ odpowiadają dwie wartości K:

$a + \Delta a = \lg K'$ stąd K' oraz $a - \Delta a = \lg K''$ stąd K''.

Niepewnością wyznaczenia wielkości K jest wyrażenie:

$$\Delta K = \frac{|K' - K''|}{2}.$$