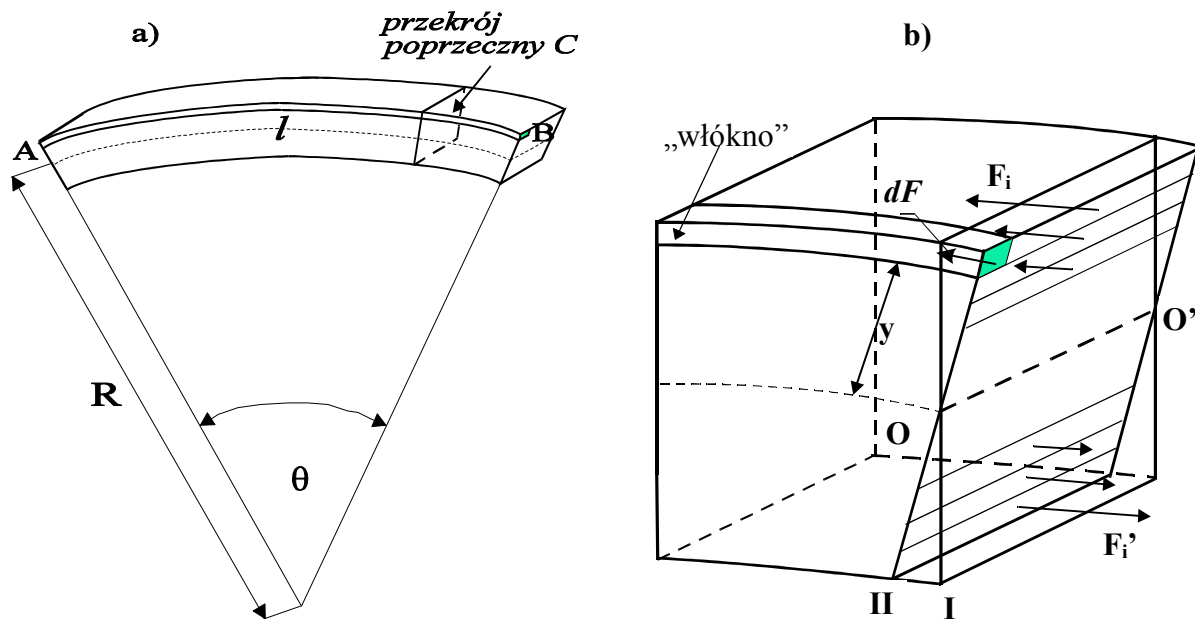


Pomiar modułu sprężystości metalu metodą ugięcia pręta.

- I. Cel ćwiczenia:** wyznaczenie modułu sprężystości podłużnej E (modułu Younga) dla żelaza, aluminium i mosiądzu. Porównanie ugięć prętów wykonanych z tego samego materiału o różnych kształtach przekrojów poprzecznych jednakowo obciążonych.
- II. Przyrządy:** czujnik zegarowy, obciążniki, pryzmaty, pręty o różnych przekrojach poprzecznych.
- III. Literatura:** 1. L. Kacperski, I Pracownia Fizyczna,
2. T. Dryński, Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, PWN 1976,
3. G. M. Fichtenholz, Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN 1964.

IV. Wstęp.

Zginanie pręta (rys. 1) powoduje rozciąganie jego górnej części i ściskanie jego dolnej - istnieje więc taki przekrój podłużny (nazywany powierzchnią neutralną), którego wymiary nie ulegają zmianie (linia przerywana na rysunku 1a i 1b).



Rys 1. a) Pręt o długości l poddany zginaniu ; **b)** odkształcenie pręta w pobliżu przekroju C ; I - oznacza kierunek przekroju przed zginaniem, II - położenie przekroju po zgięciu, F_i, F_i' - siły sprężystości działające na warstwy pręta; $F = \sum_i (F_i + F_i') = 0$

Pręt można rozpatrywać jako zbiór cienkich „włókien” (tworzących warstwy) rozciąganych lub ściskanych w procesie zginania, w zależności od ich położenia względem powierzchni neutralnej. Jedno z tych włókien zaznaczone jest na rysunku 1a jako AB. Siły sprężyste F działające w górnych warstwach przekroju C (powyżej osi OO') skierowane są do jego środka (gdy pręt jest obciążony w środku) lub miejsca zamocowania, a siły sprężyste F' działające w dolnych warstwach, skierowane są ku wolnemu końcowi. Sił zewnętrznych powodujących odkształcenie na rysunku nie zaznaczono (są one równe siłom sprężystości i przeciwnie skierowane). Jeżeli początkowa długość pręta wynosi l , promień krzywizny po ugięciu R , wówczas zmiana długości włókna AB, położonego w odległości y od powierzchni neutralnej, wyniesie:

$$\Delta l = AB - l = (R + y) \cdot \theta - R \cdot \theta = y \cdot \theta \quad (1)$$

Korzystając z prawa Hooke'a, można znaleźć wartość siły rozciągającej włókno:

$$dF = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \cdot dS = E \cdot y \cdot \frac{dS}{R} \quad (2)$$

gdzie dS oznacza powierzchnię przekroju poprzecznego włókna, E jest modułem sprężystości materiału pręta.

Suma algebraiczna wszystkich sił działających w pręcie musi być równa 0:

$$F = \int dF = 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{E}{R} \iint_S y \cdot dS = 0 \quad (3)$$

Związek (3) pozwala znaleźć położenie powierzchni neutralnej. Siła dF działająca na pojedyncze włókno ma względem powierzchni neutralnej moment dN :

$$dN = y \cdot dF = E \cdot y^2 \cdot \frac{dS}{R} \quad (4)$$

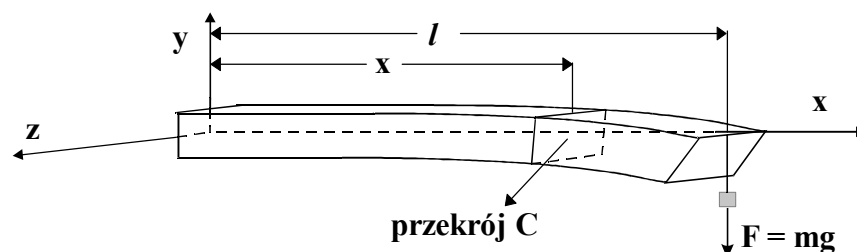
W przypadku małych odkształceń możemy jak poprzednio ograniczyć się do znalezienia sumy algebraicznej momentów:

$$N = \frac{E}{R} \cdot \iint_S y^2 \cdot dS = \frac{E \cdot I}{R} \quad (5)$$

gdzie $I = \iint_S y^2 dS$ nazywane jest niekiedy „momentem bezwładności przekroju” ze względu na formalne podobieństwo do momentu bezwładności.

V. Ugięcie pręta obciążonego jednostronnie.

Założmy, że masa pręta jest mała w porównaniu z masą obciążnika i że mała jest również krzywizna pręta.



Rys. 2. Ugięcie pręta zamocowanego jednym końcem i obciążonego obciążnikiem o masie m .

Rozpatrzmy przekrój C pręta, w którym działa układ sił ściskających poniżej powierzchni neutralnej i rozciągających powyżej tej powierzchni (są to siły zewnętrzne, przeciwnie do sił sprężystości zaznaczonych na rysunku 1b). Moment tych sił, dany przez (5), w warunkach

równowagi zgiętego pręta jest równy momentowi siły zewnętrznej czyli momentowi siły ciężkości obciążnika:

$$\frac{E \cdot I}{R} = m \cdot g \cdot (l - x) \quad (6)$$

gdzie R jest promieniem krzywizny w otoczeniu przekroju C , a x jest odległością przekroju od miejsca zamocowania. Promień krzywizny wyraża się znanym z podręczników analizy¹ wzorem:

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \quad (7a)$$

Ponieważ krzywizna jest bardzo mała, $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ można pominąć w porównaniu z jednością:

$$R \cong \frac{1}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \quad (7b)$$

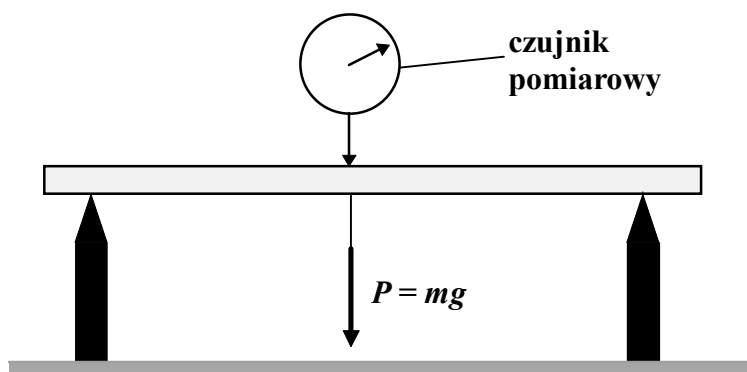
Stąd : $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{m \cdot g \cdot (l - x)}{E \cdot I}$ i $\frac{dy}{dx} = \frac{m \cdot g}{E \cdot I} \left(l \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) + C$.

Z warunku $dy/dx = 0$ (dla $x = 0$), można znaleźć stałą całkowania $C = 0$. Rozwiązanie ostatniego równania różniczkowego pozwala znaleźć ugięcie końca pręta y_0 :

$$y_0 = \frac{1}{3} \frac{m \cdot g \cdot l^3}{E \cdot I} \quad (8a)$$

VI. Ugięcie pręta obciążonego w środku.

W przypadku, gdy pręt podparty jest na obu końcach (patrz rys. 3) i obciążony w środku, siły reakcji działające w miejscach podparcia mają wartość $mg/2$.



Rys. 3. Pomiar ugięcia pręta obciążonego w środku i podpartego na obu końcach.

Jeżeli pręt ma długość l (l oznacza odległość pomiędzy pryzmatami; rzeczywista długość pręta jest oczywiście większa), ugięcie w środku jest takie samo, jak ugięcie pręta dwukrotnie krótszego, zamocowanego jednym końcem i obciążonego dwukrotnie mniejszą masą. Tak

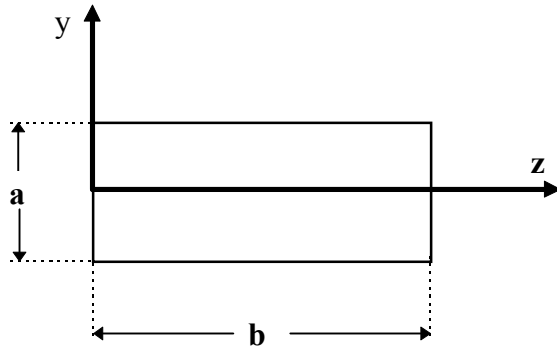
¹ Patrz np. G. M. Fichtenholz, Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN 1964.

więc poszukiwane ugięcie otrzymamy podstawiając $mg/2$ i $l/2$, w miejsce obciążenia i długości, do wzoru (8a) :

$$y_o = \frac{1}{48} \frac{m \cdot g \cdot l^3}{E \cdot I} \quad (8b).$$

VII. Pomiary i opracowanie.

Obliczmy teraz „moment bezwładności przekroju” I dla przypadku przekroju prostokątnego (rys. 4).



Rys. 4. Prostokątny przekrój poprzeczny pręta o wymiarach $a \times b$.

„Moment bezwładności przekroju” I wynosi:

$$I = \iint_S y^2 dS = \iint y^2 dy dz = 2 \int_0^{a/2} y^2 dy \int_0^b dz = \frac{2}{3} y^3 \Big|_0^{a/2} z \Big|_0^b = \frac{a^3 \cdot b}{12}.$$

Dla przekroju kołowego otrzymamy: $I = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$.

Ze związku (8b) znajdziemy wówczas ugięcie

$$y_o = \frac{1}{4} \frac{m \cdot g \cdot l^3}{E \cdot a^3 \cdot b} \quad (\text{dla przekroju prostokątnego}),$$

oraz

$$y_o = \frac{4}{3} \frac{m \cdot g \cdot l^3}{\pi \cdot E \cdot d^4} \quad (\text{dla przekroju kołowego}).$$

Otrzymaliśmy więc liniową zależność pomiędzy masą obciążnika i ugięciem $y_o = k \cdot m$, gdzie

$$k = \frac{1}{4} \frac{g \cdot l^3}{E \cdot a^3 \cdot b} \quad \text{dla pręta o przekroju prostokątnym} \quad (9a),$$

oraz

$$k = \frac{4}{3} \frac{g \cdot l^3}{\pi \cdot E \cdot d^4} \quad \text{dla pręta o przekroju kołowym} \quad (9b).$$

Mierząc wielkość ugięcia dla różnych mas obciążnika, otrzymujemy wyniki układające się w pobliżu prostej o nachyleniu k . Znając wartość współczynnika k można ze wzorów (9a) lub (9b) znaleźć wartość modułu sprężystości podłużnej materiału, z którego wykonano pręt:

$$E = \frac{1}{4} \frac{g \cdot l^3}{a^3 \cdot b \cdot k} \rightarrow \text{przekrój prostokątny}; \quad E = \frac{4}{3} \frac{g \cdot l^3}{\pi \cdot d^4 \cdot k} \rightarrow \text{przekrój kołowy} \quad (10).$$

Pomiary.

1. Dokonać niezbędnych pomiarów prętów, które użyte zostaną w ćwiczeniu (parametry potrzebne do obliczenia „momentu bezwładności przekroju” I oraz odległość l pomiędzy pryzmatami, na których spoczywają pręty).
2. Dla prętów o przekroju kołowym (lub prostokątnym) zmierzyć wielkość ugięcia dla różnych mas obciążnika.

Z uwagi na sposób mocowania czujnika pomiarowego wskazane jest wykonanie pomiarów począwszy od maksymalnego obciążenia pęta, zdejmując kolejno odważniki, tak aby końcówka czujnika była popychana w górę, a nie opadała w dół pod wpływem własnego ciężaru i działania wewnętrznej sprężyny. Przykładowa tabelka pomiarów, gdy pręt początkowo obciążono $n = 6$ obciążnikami.

Tabela 1

Lp $i=1...7$	Obciążenie [kg]	Wskazanie czujnika s_i $\times 10^{-3}$ [m]	Ugięcie $y_{oi} = s_7 - s_i$ $\times 10^{-3}$ [m]
1	$6 \times 0,25 = 1,5$	1,25	1,61
2	$5 \times 0,25 = 1,25$	1,52	1,32
6	$1 \times 0,25 = 0,25$	2,59	0,27
7	0	2,86	0






3. Sporządzić wykres $y_{oi} = f(m)$ i metodą najmniejszych kwadratów znaleźć współczynnik k nachylenia prostej.
4. Korzystając ze wzoru (10) znaleźć wartość E modułu sprężystości podłużnej materiału (modułu Younga).
5. Obliczyć błąd ΔE pomiaru modułu Younga.

VIII. Zastosowanie.

Ze wzoru (8a) wynika, że ugięcie pręta jest odwrotnie proporcjonalne do I , tzn. zwiększając I , zwiększamy odporność pręta na zginanie (zmniejszamy y_o).

Nie interesuje nas oczywiście najprostszy sposób zwiększenia momentu I poprzez użycie grubszych prętów. Zagadnienie polega na otrzymaniu możliwie dużej sztywności pręta o założonej długości, gdy dysponujemy określoną ilością materiału. Dlatego w drugiej części doświadczenia przewidziano pomiar ugięcia jednakowo obciążonych prętów o zbliżonej masie i jednakowej długości, lecz o różnych kształtach przekrojów poprzecznych. Wyniki wygodnie jest zebrać w tabeli 2 (strona następna).

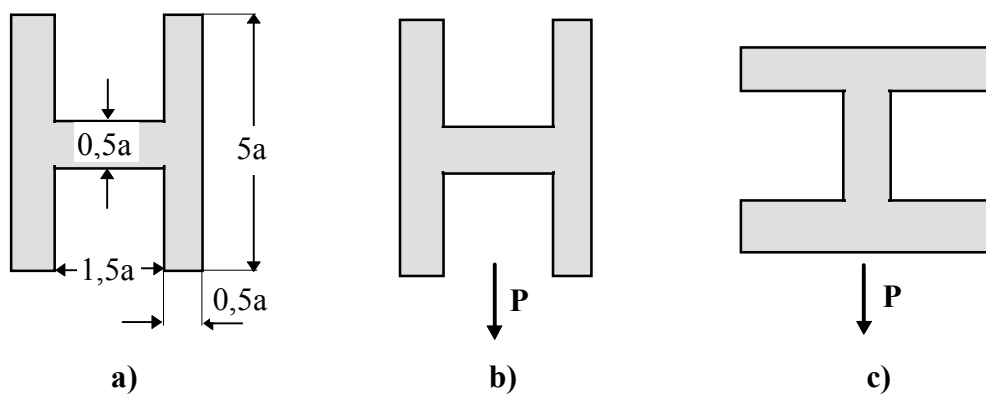
Tabela 2

Kształt przekroju poprzecznego	Obciążenie [kg]	Ugięcie zmierzone [m]	Ugięcie obliczone [m]
			
			
			
			
			

Ostatnią kolumnę tabeli uzupełniamy w oparciu o wzór (8b), korzystając ze znajomości modułu sprężystości znalezionej w I-iej części doświadczenia. Momenty bezwładności przekroju dla różnych prętów są załączone do instrukcji (można je obliczyć tak jak zrobiono to w części VII).

Pytania

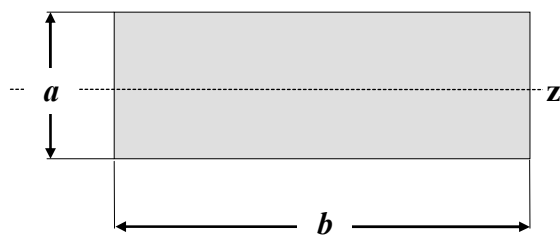
Znaleźć stosunek ugięć pręta o kształcie litery H, zamocowanego jak na rysunku 5, poniżej. Czy wynik pokrywa się z intuicyjnymi oczekiwaniami?



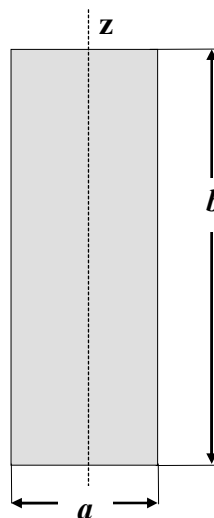
Rys. 5. Pręty o przekroju w kształcie litery H; P - obciążenie pręta.

DODATEK

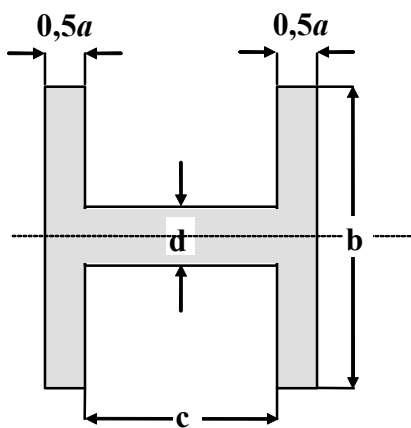
Momenty bezwładności przekrojów



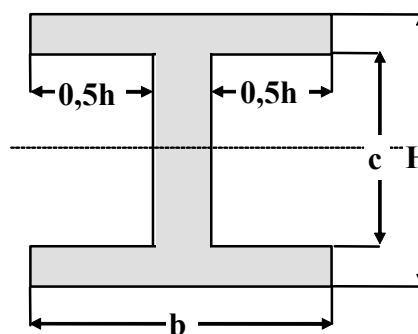
$$I_{\blacksquare} = \frac{a^3 \cdot b}{12}$$



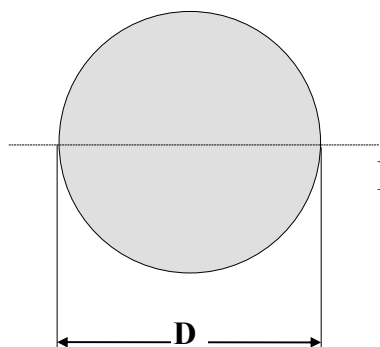
$$I_{\blacksquare} = \frac{a \cdot b^3}{12}$$



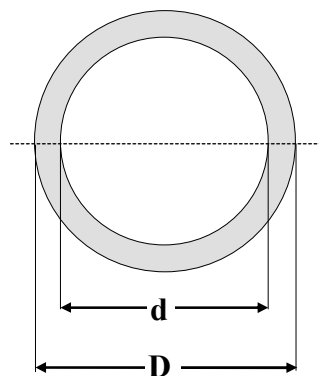
$$I_{\mathbf{H}} = \frac{a \cdot b^3}{12} + \frac{c \cdot d^3}{12}$$



$$I_{\mathbf{I}} = \frac{b \cdot H^3}{12} - \frac{h \cdot c^3}{12}$$



$$I_{\bullet} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$$



$$I_{\circ} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$