ROZKŁAD OPORNOŚCI OPORNIKÓW. EKSPERYMENT STATYSTYCZNY

I. Cel ćwiczenia: Poznanie charakterystyk i prawidłowości zdarzeń statystycznych na podstawie doświadczenia.

II. Przyrządy: Multimetr, przewody i zacisk mocowania.

III. Literatura:

[1] J. L. Kacperski, ***„I Pracownia fizyczna”,***

[2] J. L. Kacperski, K. Niedźwiedziuk; ***„I Pracownia fizyczna”,***

[3] J. L. Kacperski „*Opracowanie danych pomiarowych*”;

[4] K. Małuszyńska, M. Przytuła „*Laboratorium fizyki jądrowej*”,

[5] M. Kaczmarczyk „ *Ćwiczenie statystyczne. Stabilizacja względnych częstości i rozkład względnych częstości zdarzeń” (instrukcja pracowniana),*

[6] H. Hofmokl, A. Zawadzki, ***„Laboratorium fizyczne”.***

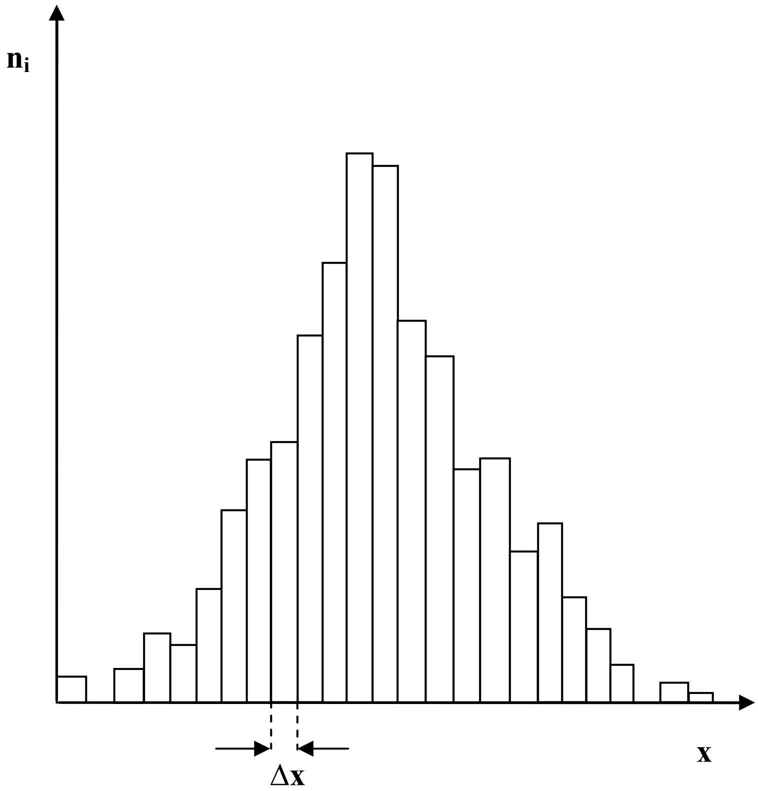
IV. Rozkład normalny

Przy pomiarze wielkości fizycznych otrzymane wyniki zależą od wielu czynników, często niezależnych od prowadzącego pomiar. Działanie ich powoduje pojawienie się błędu pomiaru. Nie jesteśmy w stanie przewidzieć wyniku pomiaru wykonanego w danych warunkach. Wynik jest wielkością zmieniającą się przypadkowo w pewnych granicach, niekiedy nieskończonych. Wielkość tą nazywamy **zmienną losową,** charakteryzowaną przez pewien rozkład, który będzie szerszy (w przypadku gdy wystąpi wiele czynników zakłócających) lub węższy (gdy czynników będzie niewiele). Rozkład doświadczalny nazywamy **histogramem.** W przypadku kiedy wynikiem pomiaru mogą być tylko niektóre wartości z dostępnego przedziału mówimy, że jest to zmienna losowa **skokowa (dyskretna**). W przypadku kiedy wynikiem pomiaru może być dowolna wartość mówimy o zmiennej losowej **ciągłej.**

Wykonajmy serię pomiarów pewnej wielkości x. Niech otrzymane wyniki pomiaru x_1, x_2, x_3,…x_n przyjmują wartości z określonego przedziału oraz niech liczba pomiarów n spełnia warunek n >> 20 (jest to ilość wystarczająca do uzyskania w praktyce przybliżenia rozkładu normalnego). Na histogramie (rys.1) możemy przedstawić dane doświadczalne dzieląc je na przedziały (klasy) o równej szerokości Δx. Szerokość przedziału powinna wynosić w granicach $\left(\frac{1}{4} \div \frac{1}{6}\right)\sigma$ ze względu na przejrzystość histogramu, gdzie σ jest odchyleniem standardowym (patrz dalej). Ilość przedziałów musi być liczbą całkowitą. Na osi rzędnych odkładamy ilość pomiarów n_i odpowiadających danemu przedziałowi ($\overline{x}_i$ – Δx/2, $\overline{x}_i$ + Δx/2), a na osi odciętych j przedziałów o szerokości Δx ($\overline{x}_i$ jest środkiem i-tego przedziału). Zachodzi oczywiście $\sum_{i=1}^{j} n_i = n$.

Otrzymane wartości najczęściej są zgrupowane w obszarze znajdującym się w środkowej części histogramu. Im dalej od tego obszaru tym mniej obserwuje się przypadków, stąd częstość występowania takiej wartości maleje. Częstość występowania mierzymy stosunkiem liczby pomiarów n_i w danym przedziale do całkowitej liczby pomiarów n czyli

$$P_i = \frac{n_i}{n} \tag{1}$$



Rys.1 Histogram doświadczalny pewnej wielkości x

W przypadku, gdy liczba pomiarów n wzrasta, a szerokość Δx maleje, rozkład wyników doświadczalnych w przypadku granicznym daje krzywą ciągłą, która wyraża się rozkładem normalnym Gaussa. Krzywa jest symetryczna względem wartości średniej i charakteryzują ją dwa parametry: wartość średnia $\overline{x}$ i odchylenie standardowe σ. Wartość średnia określa położenie maksimum krzywej, a odchylenie standardowe jej szerokość. Mamy więc

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{2}$$

lub

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{j} n_i \overline{x}_i}{n} \tag{2a}$$

gdy próba pomiarowa podzielona jest na przedziały (klasy). Tutaj x_i jest wynikiem pomiaru a $\overline{x}_i$ jest środkiem i-tego przedziału.

Dla odchylenia standardowego σ:

$$\sigma \cong s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \tag{3}$$

lub

$$\sigma \cong s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{j} n_i (\overline{x}_i - \overline{x})^2}{n-1}} \tag{3a}$$

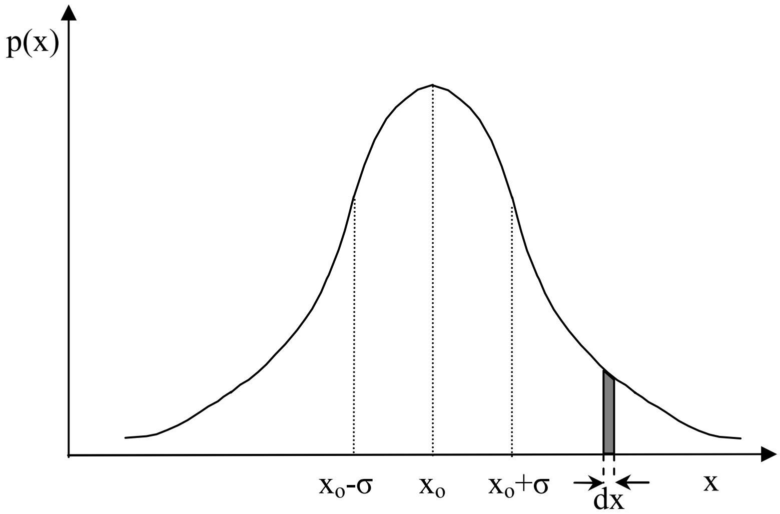
dla próby podzielonej na przedziały; s jest średnim błędem kwadratowym pojedynczego pomiaru.

W przypadku, gdy n jest bardzo duże, rozkład wyników pomiarów można przedstawić w postaci funkcji, którą wyraża rozkład normalny.

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_o)^2}{2\sigma^2}} \tag{4}$$

Funkcję p(x) nazywamy gęstością prawdopodobieństwa rozkładu normalnego.

Iloczyn $p(x) \cdot dx$ stanowi prawdopodobieństwo znalezienia wartości x w przedziale (x − dx/2, x + dx/2), innymi słowy jest to prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną losową wartości z przedziału (x − dx/2, x + dx/2) (zaciemnione pole na rys.2).



Rys. 2 Funkcja gęstości prawdopodobieństwa

Funkcja p(x) jest symetryczna względem x_o tzn. wartości rzeczywistej wielkości mierzonej. Wartość średnia $\bar{x}$ jest bliska wartości rzeczywistej x_o. W praktyce dla serii zawierającej bardzo dużą liczbę pomiarów przyjmujemy, że $x_o \cong \bar{x}$ oraz $\sigma \cong s$

Prawdopodobieństwo tego, że wynik przyjmie jedną z wartości od zera do nieskończoności wynosi

$$P(-\infty<x<\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1 \qquad (5)$$

co odpowiada pewności. Pole powierzchni pod krzywą równe jest jedności.

W przypadku podstawienia $u = \dfrac{x - x_o}{\sigma}$ krzywa o równaniu (4) ulega przesunięciu w lewo o odcinek x_o, a odcięte są wyrażone w jednostkach σ. W wyniku w/w zmian otrzymujemy tzw. krzywą znormalizowaną o parametrach $x_o = 0$, $\sigma = 1$. Równanie (4) przyjmuje postać

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \qquad (6)$$

Wartości funkcji p(u) w zależności od u są stabelaryzowane (patrz pozycje literatury [1]-[3],[**6**]). Z doświadczalnych wyników obliczamy u, a wartość gęstości prawdopodobieństwa p(u) odczytujemy z tabeli. Aby wykres teoretyczny porównać z histogramem doświadczalnym należy je nałożyć na siebie, obliczając uprzednio teoretyczną liczbę n_i^o przypadków występowania w poszczególnych przedziałach.

Ponieważ prawdopodobieństwo tego, że wynik pomiaru leży w przedziale ($\bar{x}_i - \Delta x/2$, $\bar{x}_i + \Delta x/2$) wynosi $P_i = p(\bar{x}_i)\cdot\Delta x$, a $p(\bar{x}_i) = \dfrac{p(u_i)}{\sigma}$, to wówczas wykorzystując równanie (1) po niewielkim przekształceniu dla przedziału o szerokości Δx otrzymamy

$$n_i^o = \frac{n \cdot \Delta x \cdot p(u_i)}{\sigma} \qquad (7)$$

V. Test zgodności χ^2 (chi-kwadrat)

Rozkład doświadczalny określonej wielkości fizycznej można porównać z rozkładem teoretycznym. Jeśli nie jesteśmy pewni, że zbiór danych doświadczalnych podlega założonemu rozkładowi, wykonujemy tzw. test zgodności χ^2 (test Pearsona).

Niech wartości otrzymane w wyniku pomiaru wynoszą $x_1, x_2 \ldots x_n$. Podzielmy oś odciętych na j przedziałów każdy o szerokości Δx ($\bar{x}_i - \Delta x/2$, $\bar{x}_i + \Delta x/2$), gdzie i = 1,2,….j. Niech P_i oznacza prawdopodobieństwo, że zmienna losowa x o rozkładzie p(x) przyjmuje wartości z przedziału ($\bar{x}_i - \Delta x/2$, $\bar{x}_i + \Delta x/2$), n_i niech oznacza doświadczalną liczbę pomiarów odpowiadającą przedziałowi ($\bar{x}_i - \Delta x/2$, $\bar{x}_i + \Delta x/2$), a $\sum_{i=1}^{j} n_i = n$. Spodziewaną teoretyczną liczbę obserwacji w i-tym przedziale podaje wzór (7). Wówczas jako kryterium zgodności rozkładu n_1, $n_2 \ldots n_j$ z rozkładem normalnym przyjmujemy wielkość:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{j} \frac{(n_i - n_i^o)^2}{n_i^o} \tag{8}$$

którą nazywamy zmienną chi- kwadrat o k stopniach swobody. Ilość stopni swobody k obliczamy z relacji

$$k = j - r - 1 \tag{9}$$

gdzie j jest to liczba przedziałów, a r liczba parametrów rozkładu teoretycznego – dla rozkładu normalnego r = 2

Optymalna liczba przedziałów jest bliska pierwiastkowi z liczby przypadków: j = $\sqrt{n}$. W przypadku stosowania testu χ^2 powinny być spełnione następujące warunki: liczba przedziałów $j > 6 \div 8$, liczba stopni swobody $k \geq 4$, ilość pomiarów w każdym przedziale $n_i > 5$ (w przeciwnym wypadku należy połączyć w jeden przedział kilka skrajnych przedziałów). Testowanie rozkładu będzie polegało na obliczeniu wartości χ^2 zgodnie ze wzorem (8) i porównaniu jej ze stabelaryzowanym rozkładem $\chi^2_{k,\alpha}$ dla liczby stopni swobody k i założonego poziomu istotności α (zwykle α = 0,05).
Hipotezę o zgodności rozkładu eksperymentalnego i teoretycznego przyjmujemy, gdy spełniona jest nierówność

$$\chi^2 \leq \chi^2_{k,\alpha} \tag{10}$$

gdzie α jest przyjętym poziomem istotności. Więcej na temat rozkładu i testu χ^2 w ***Uzupełnieniu*** str.6 oraz w [2] i [4].

VI. Pomiary

Pomiar oporności wszystkich oporników wykonujemy multimetrem cyfrowym, wykorzystując go jako omomierz. Końce oporników chwytamy ”krokodylkami”, którymi są zakończone z jednej strony przewody pomiarowe lub wykorzystujemy odpowiednią oprawkę zaciskającą opornik. Pomiar dla danego opornika wykonujemy jeden raz.

VII. Opracowanie wyników

1. Ustalamy wartość minimalną R_{min} i R_{max} i znajdujemy zakres $R_{max} - R_{min}$.

2. W/w zakres dzielimy na j przedziałów o szerokości ΔR, uwzględniając przy tym kryteria dla j (trzeba się zdecydować na jedno kryterium).

3. Znajdujemy ilość pomiarów n_i w danym przedziale.

4. Obliczamy wartość $\overline{R}$ ze wzoru (2a) i odchylenie standardowe σ ≅ s ze wzoru (3a) wykorzystując odpowiednie kolumny tabeli 1.

5. Obliczamy teoretyczną wartość n_i^o (kolumna 10 w tabeli 1). Uprzednio znajdujemy u_i i odczytujemy z właściwej tablicy wartości $p(u_i)$. Teoretyczna wartość n_i^o odnosi się do środka przedziału, którego wartość wynosi: $\overline{R_i} = R_i + \frac{1}{2}\Delta R$. Wyniki i obliczenia zapisujemy w tab. 1. Kolumna 2 tabeli 1 zawiera przedziały wartości oporów niedomknięte z prawej strony.

6. Na podstawie 4 kolumny wykonujemy histogram doświadczalny. Na niego nakładamy wartości teoretyczne (kolumna 10 w tabeli 1). Pozwala to ocenić w przybliżeniu charakter rozkładu (w przypadku wątpliwości patrz w poz.[2], [4]).

Tab.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	$[R_i, R_i+\Delta R)$	$\overline{R}_i$	n_i	$n_i\overline{R}_i$	$\overline{R}_i - \overline{R}$	$n_i(\overline{R}_i - \overline{R})^2$	$u_i = \frac{(\overline{R}_i - \overline{R})}{s}$	$p(u_i)$	$n_i^o = \frac{n\Delta R p(u_i)}{s}$
1									
2									
⋮									
j									

7. Sprawdzamy „normalność” rozkładu próbki oporników przy pomocy testu χ^2. Zanim obliczymy wartość χ^2 musimy sprawdzić, czy zostały spełnione wszystkie kryteria dla przeprowadzenia w/w testu (patrz str. 3 tej instrukcji), zwłaszcza czy liczebności przedziałów są większe od $n_{min} = 5$. Jeśli ten warunek nie jest spełniony, należy połączyć odpowiednią liczbę sąsiadujących przedziałów (jak w tabeli 2).
W przypadku grupowania przedziałów należy pamiętać, że ich liczba ulega zmniejszeniu o liczbę tych zsypanych. Zmniejszy się też odpowiednio liczba stopni swobody k (wzór 9). Więcej patrz [2] str.26. Korzystając z tabeli 1 tworzymy tabelę 2 obliczamy wartość χ^2.
Dla poziomu istotności $\alpha = 0,05$ i znanej liczby stopni swobody k z właściwej tabeli odczytujemy $\chi^2_{k,\alpha}$. Jeśli zachodzi relacja (10) hipotezę o zgodności rozkładu eksperymentalnego i teoretycznego przyjmujemy. Jeśli jest odwrotnie hipotezę odrzucamy .

Tab. 2

1	2			3	4	6
Nr przedziału *i*	n_i	$u_i = \frac{(\overline{R}_i - \overline{R})}{s}$	$p(u_i)$	$n_i^o = \frac{n\Delta R p(u_i)}{s}$	$(n_i - n_i^o)$	$\frac{(n_i - n_i^o)^2}{n_i^o}$
1	n_1 }			n_i^o }		
2	n_2			n_2^o		
3	n_3			n_3^o		
⋮	⋮			⋮		
j – 2	n_{j-2}			n_{i-2}^o		
j – 1	n_{j-1} }			n_{i-1}^o }		
j	n_j			n_j^o		

$\chi^2 =$

8. Przeprowadzamy dyskusję wykonanego doświadczenia i otrzymanych wyników.

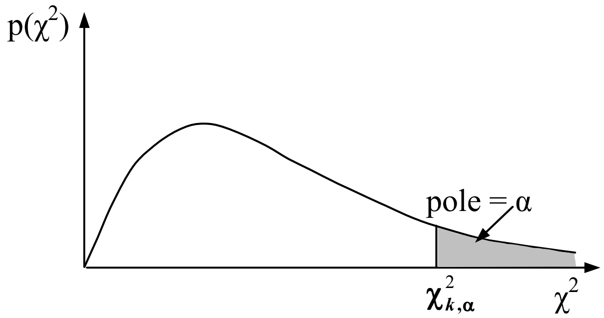
VIII. UZUPEŁNIENIE

Rozkład χ^2, test χ^2, poziom istotności.

Jeśli u_1, u_2, ... , u_j są zmiennymi losowymi podlegającymi rozkładowi normalnemu o wartości średniej równej 0 i odchyleniu standardowemu σ = 1, to wyrażenie

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{j} u_i^2 \qquad (11)$$

określa nową zmienną losową χ^2 (chi-kwadrat). Podlega ona rozkładowi, którego gęstość prawdopodobieństwa opisana jest funkcją $p(\chi^2)$. Postać analityczna funkcji jest dość złożona i nie zamieszczamy jej w instrukcji (można ją znaleźć w [3], [4]). Jedynym parametrem tego rozkładu jest liczba stopni swobody k. Liczba stopni swobody jest równa: k = j – r –1 (j – liczba składników sumy (11), r – liczba parametrów założonego rozkładu). Przebieg funkcji gęstości prawdopodobieństwa $p(\chi^2)$ dla pewnego k przedstawia rysunek 3.



Rys. 3 Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu χ^2 dla pewnej wartości k

Prawdopodobieństwo tego, że zmienna χ^2 przyjmie wartość większą od pewnej wartości $\chi^2_{k,\alpha}$ wynosi

$$P\left(\chi^2 > \chi^2_{k,\alpha}\right) = \int_{\chi_{k,\alpha}}^{\infty} p\left(\chi^2\right) d\chi^2 = \alpha \qquad (12)$$

Parametr α nosi nazwę ***poziomu istotności*** i jest równy ciemnej powierzchni na rysunku 3 (tak jest, jeśli mamy do czynienia z rozkładem unormowanym – całkowita powierzchnia pod krzywą jest równa 1). Prawdopodobieństwa P, których znajomość jest istotna w wielu zagadnieniach statystycznych są stabelaryzowane (np. w [3] [6],). Istnieją dwa rodzaje tablic. Jedne podają dla różnych wartości k prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa przyjmie wartość większą od określonej liczby $\chi^2_{k,\alpha}$. Drugi rodzaj tablic podaje dla różnych wartości parametru k takie liczby rzeczywiste $\chi^2_{k,\alpha}$, że prawdopodobieństwo przybrania przez zmienną losową wartości większej od danej liczby jest równe z góry danej liczbie α.

Przyjętą hipotezę (np., że rozkład doświadczalny jest rozkładem normalnym) sprawdzamy korzystając z własności rozkładu χ^2. Najpierw dla potrzeb testu obliczamy wartość χ^2 dla naszej serii pomiarów (wg wzoru (8) tej instrukcji). Oznaczamy tę wartość przez χ^2_k. Następnie z powodu istnienia dwóch rodzajów tablic stosujemy się do jednej z opisanych niżej procedur.

1. Korzystając z odpowiedniej tablicy [2] znajdujemy prawdopodobieństwo α = P = P($\chi^2 > \chi^2_k$) dla odpowiedniej liczby stopni swobody k i wartości χ^2_k. Jeżeli odczytana wartość prawdopodobieństwa P jest zawarta w przedziale 0,1 < P < 0,9, to hipotezę przyjmujemy za prawdziwą. Gdy α < 0,01 lub α > 0,98 hipoteza jest mało prawdopodobna i należy ją odrzucić. Jeśli α > 0,98, to istnieje podejrzenie, że jakieś dodatkowe czynniki np. znajomość przewidywanej wielkości, sprowokowała zaokrąglanie wartości pomiarowej, aby dostać maksymalną zgodność z teorią.

2. Korzystając z odpowiedniej tablicy [1], dla określonej liczby stopni swobody k i założonego poziomu istotności α (czyli określonego prawdopodobieństwa P) znajdujemy wartość $\chi^2_{k,\alpha}$. Jeśli zachodzi relacja $\chi^2_k < \chi^2_{k,\alpha}$, to hipotezę przyjmujemy za prawdziwą. Jeśli jest odwrotnie - hipotezę odrzucamy.

Bardziej szczegółowe informacje na temat rachunku statystycznego można znaleźć w literaturze podanej na początku instrukcji.