WYZNACZANIE MOMENTU BEZWŁADNOŚCI BRYŁY METODĄ DRGAŃ SKRĘTNYCH

I. Cel ćwiczenia: wyznaczenie momentu bezwładności bryły przez pomiar okresu drgań skrętnych, zastosowanie twierdzenia Steinera.

II. Przyrządy: bryła w formie podstawy krzyżakowej, 4 dodatkowe wydrążone walce, suwmiarka, stoper, waga.

III. Literatura:
[1] J. L. Kacperski, „I Pracownia fizyczna",
[2] A. Piekara "Mechanika ogólna" roz.VII – Dynamika bryły sztywnej,
[3] J. L. Kacperski, K. Niedźwiedziuk „I Pracownia fizyczna".

IV. Wprowadzenie

Bryłą sztywną nazywamy ciało, w którym odległość między dwoma dowolnie wybranymi punktami jest stała i nie zmienia się pod wpływem przyłożonych do niego sił zewnętrznych, jeśli tylko nie są one zbyt wielkie. Bryła sztywna jest szczególnym układem punktów materialnych, w którym odległości między punktami są stałe.

Momentem bezwładności bryły względem jakiejś dowolnej osi O nazywamy sumę iloczynów mas Δm małych elementów objętości bryły przez kwadraty ich odległości r od tej osi:

$$I = \sum_{i} \Delta m_i r_i^2 \qquad (1)$$

Gdy element masy Δm jest nieskończenie mały, czyli $\Delta m \to dm$, to wówczas moment bezwładności I jest równy

$$I = \int_m r^2 dm \qquad (1a)$$

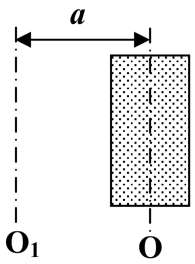
Wykorzystując wzór (1a) możemy obliczać momenty bezwładności brył o prostym, regularnym kształcie geometrycznym, obracających się względem osi wyróżnionej przez symetrię bryły.

Wielkość momentu bezwładności danej bryły jest zależna od tego, wokół jakiej osi następuje jej obrót. Moment bezwładności bryły złożonej z kilku elementów jest równy sumie momentów bezwładności tych elementów bryły względem tej samej osi, co wynika z definicji momentu bezwładności (np. moment bezwładności „hantli", która składa się z dwóch kul o równych masach połączonych prętem względem osi przechodzącej przez środek pręta wynosi $I_c = 2I_k + I_p$, gdzie I_k, I_p są odpowiednio momentem bezwładności kuli i momentem bezwładności łączącego je pręta względem tej osi).

Moment bezwładności względem dowolnej osi wyznacza się często korzystając z twierdzenia Steinera, które brzmi:

Moment bezwładności I bryły względem dowolnej osi O_1 jest równy sumie momentu bezwładności I_o względem osi O przechodzącej przez środek masy bryły i równoległej do osi O_1 oraz iloczynu masy m bryły i kwadratu odległości *a* między osiami:

$$I = I_o + m\,a^2 \qquad (2)$$

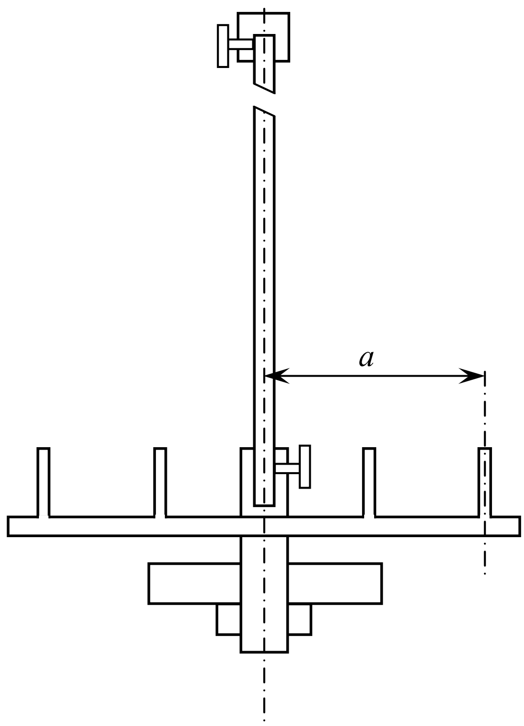


Rys.1 Bryła posiadająca oś O przechodzącą przez środek masy i dowolna oś O_1.

W przypadku nietypowego kształtu bryły obliczenie momentu bezwładności związane jest z kłopotliwymi obliczeniami. W takich przypadkach moment bezwładności wyznacza się doświadczalnie wykorzystując własności drgań skrętnych.

V. Metoda pomiaru

Bryła sztywna użyta w doświadczeniu to metalowy krążek i dwie skrzyżowane metalowe listwy, na które można nakładać walce w różnych odległościach od osi obrotu bryły. Cała bryła zawieszona jest na sprężystym drucie (rys.2). Ze względu na skomplikowany kształt bryły jej moment bezwładności znajduje się metodą doświadczalną, wykorzystując wspomnianą metodę drgań skrętnych.



Rys. 2 Przekrój bryły badanej w ćwiczeniu.

Jeśli skręcimy metalowy krzyżak o kąt φ, przykładając do niego parę sił o wartości F_z, to o ten sam kąt skręci się również drut, na którym jest on zawieszony. Moment skręcający N_z zewnętrznej pary sił jest równy co do wartości wywołanemu przez niego momentowi N sił sprężystych lecz skierowany jest przeciwnie. Dlatego mamy

$$N = -N_z = -D\varphi \qquad (3)$$

gdzie D oznacza tzw. moment kierujący.

Znak minus w równaniu (3) informuje o tym, że zwrot momentu sił sprężystych jest przeciwny do zwrotu kąta φ, któremu przypisujemy zwrot prędkości kątowej nadanej krążkowi przy obrocie.

Korzystając z II prawa Newtona dla ruchu obrotowego $N = I\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ otrzymamy:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D}{I}\varphi = 0 \tag{4}$$

Równanie (4) jest równaniem ruchu harmonicznego:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0 \tag{5}$$

Porównując równania (4) i (5) mamy:

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{D}{I} \tag{6}$$

Okres T drgań wynosi więc:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{7}$$

Ponieważ nie jest znany moment bezwładności bryły I ani moment kierujący D, konieczne jest jeszcze jedno równanie. Stanowi je wyrażenie na okres drgań bryły obciążonej dodatkowymi bryłami foremnymi (np. walcami), których moment bezwładności możemy bez trudu obliczyć:

$$T_d = 2\pi\sqrt{\frac{I_c}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{I + I_d}{D}} \tag{8}$$

gdzie I_c – całkowity moment bezwładności, I – moment bezwładności badanej bryły, I_d – moment bezwładności brył foremnych .
Rozwiązując układ równań (7) i (8) względem I otrzymujemy:

$$I = \frac{I_d T^2}{T_d^2 - T^2} \tag{9}$$

Dodatkowe bryły użyte w doświadczeniu są wydrążonymi walcami o promieniu zewnętrznym r_1 i wewnętrznym r_2.. Moment bezwładności takiego pojedynczego walca wynosi:

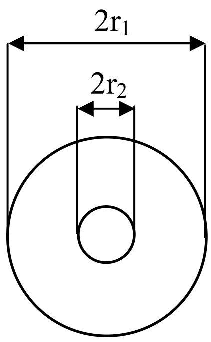
$$I_w = \frac{m(r_1^2 + r_2^2)}{2} \tag{10}$$

gdzie m oznacza masę walca.
Moment bezwładności bryły o danej masie zależy od tego jak ta masa jest rozmieszczona. Dlatego też położenie walców na badanej bryle względem osi obrotu będzie miało wpływ na całkowity moment bezwładności. Aby obliczyć moment bezwładności I_a takiego walca znajdującego się w odległości *a* od osi obrotu skorzystamy ze wzoru Steinera (2):

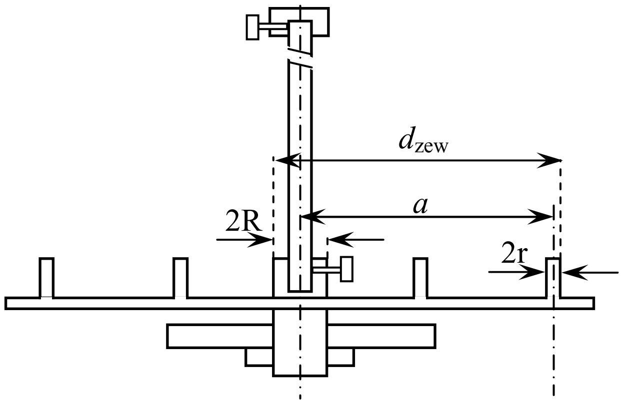
$$I_a = \frac{m(r_1^2 + r_2^2)}{2} + m\,a^2 \tag{11}$$

VI. Pomiary

1. Zmierzyć suwmiarką średnice wewnętrzne $2r_2$ i zewnętrzne $2r_1$ walców wykorzystywanych w doświadczeniu (rys.3) oraz wyznaczyć ich masy (walce są ponumerowane). Wyniki zapisać w Tabeli 1.



Rys.3 Przekrój poprzeczny dodatkowego walca



Rys. 4 Przekrój bryły badanej w ćwiczeniu.

Tabela1

Nr walca	m [g]	$d_1 = 2r_1$ [mm]	$d_2 = 2r_2$ [mm]
1			
2			
3			
4			

2. Zmierzyć suwmiarką średnicę 2r bolców krzyżaka, średnicę zewnętrzną 2R walca mocującego bryłę z drutem i odległości d_{izew} dla dalszych (konfiguracja 1) i bliższych (konfiguracja 2) bolców, rys.4). Odległości a_i dla tych dwu konfiguracji wynoszą

$$a_i = d_{i\,zew} - r - R$$

gdzie i = 1, 2,…, 4 (numery walców). Wyniki zapisać w Tabeli 2.

Tabela 2

Nr walca	Konfiguracja 1				Konfiguracja 2			
	d = 2r [mm]	D =2R [mm]	d_{izew} [mm]	a_i [mm]	d = 2r [mm]	D = 2R [mm]	d_{izew} [mm]	a_i [mm]
1								
2								
3								
4								

3. Zmierzyć trzykrotnie czas t dwudziestu drgań skrętnych wahadła bez walców.
4. Umieścić 4 walce na bolcach zewnętrznych i zmierzyć trzykrotnie czas t_d dwudziestu drgań skrętnych tego wahadła (konfiguracja1).
5. Umieścić 4 walce na bolcach wewnętrznych i zmierzyć trzykrotnie czas t'_d dwudziestu drgań skrętnych wahadła (konfiguracja 2).

Tabela 3

Bryła bez walców t [s]			Konfiguracja 1 t_d [s]			Konfiguracja 2 t'_d [s]		

Uwaga: Przedstawiono wykonanie pomiarów dla dwóch konfiguracji. Aby wyznaczyć moment bezwładności I bryły wystarczy pomiary wykonać dla jednej z nich. Jeśli pomiary wykonano dla dwóch konfiguracji, otrzymane wartości momentu bezwładności I powinny być takie same.
Uzgodnić sposób wykonania pomiarów z prowadzącym zajęcia.

VII. Opracowanie wyników

1. Obliczyć okresy T, T_d ze wzoru $T = \frac{t}{m}$, gdzie m jest liczbą drgań skrętnych.
Obliczyć średni błąd kwadratowy dla średniej wartości $\bar{t}$ wykorzystując wzór

$$s_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(t-\bar{t})^2}{n(n-1)}} \tag{12}$$

gdzie n jest liczbą pomiarów danej wielkości. Ponieważ liczba pomiarów jest mniejsza od 10-ciu „skorygujemy” rachunek błędu, korzystając ze współczynników t rozkładu Studenta–Fishera. Niepewność wyznaczenia czasu t wynosi

$$\Delta t = s_{\bar{t}}\, t_{\alpha,k.} \tag{13}$$

gdzie $t_{\alpha,k.}$ jest współczynnikiem zależnym od parametru k = n − 1 (a więc liczby pomiarów) i od założonego współczynnika ufności α (z reguły przyjmujemy α = 0,95). Trochę więcej na ten temat w **Uzupełnieniu**. Niepewność ΔT wyznaczenia okresu drgań jest równa

$$\Delta T = \pm T\frac{\Delta t}{t} \tag{14}$$

Podobnie obliczyć ΔT_d.

2. W oparciu o wyniki pomiarów zamieszczone w Tabelach 1 i 2 obliczyć r_1, r_2, m i *a* dla każdego walca.
3. Obliczyć ze wzoru (10) moment bezwładności I_w każdego walca.
4. Obliczyć, korzystając ze wzoru (11) momenty bezwładności I_1, I_2, I_3, I_4 poszczególnych walców znajdujących się w odległości *a* od osi obrotu (indeks *a* przy symbolu I w tym wzorze odpowiada numerom walców, czyli 1, 2, 3, 4).
5. Obliczyć dodatkowy moment bezwładności I_d pochodzący od 4 nałożonych walców:
$$I_d = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$
6. Ze wzoru (9) wyznaczyć moment bezwładności I bryły.
7. Oszacować niepewności pomiarowe Δr_1, Δr_2, Δr, ΔR, Δm, Δd_{zew}, Δa, uwzględniając dokładność zastosowanych przyrządów (suwmiarki). Pamiętać, że niepewność pomiaru promienia jest równa połowie niepewności wyznaczenia średnicy.
Przyjąć, że maksymalna niepewność wyznaczenia odległości *a* jest równa:
$\Delta a = \Delta d_{zew} + \Delta r + \Delta R$.

8. Obliczyć niepewność ΔI_1 metodą różniczki zupełnej korzystając z ogólnego wzoru:

$$\Delta I_1 = \pm\left(\left|\frac{\partial I_1}{\partial m}\Delta m\right| + \left|\frac{\partial I_1}{\partial a}\Delta a\right| + \left|\frac{\partial I_1}{\partial r_1}\Delta r_1\right| + \left|\frac{\partial I_1}{\partial r_2}\Delta r_2\right|\right).$$

Przy uwzględnieniu, że $\Delta r_1 = \Delta r_2 = \Delta r$ otrzymujemy:

$$\Delta I_1 = \pm\left[2ma\Delta a + \left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + a^2\right)\Delta m + m(r_1 + r_2)\Delta r\right].$$

Ponieważ wymiary walców, ich masy oraz odległości a od osi obrotu niewiele się od siebie różnią, to można przyjąć, że zachodzi $\Delta I_1 \approx \Delta I_2 \approx \Delta I_3 \approx \Delta I_4$.

9. Obliczyć niepewność ΔI_d dodatkowego momentu bezwładności.
Jeśli cztery takie same walce rozmieszczone są niemal w identycznych odległościach od osi obrotu, to mamy $I_1 \approx I_2 \approx I_3 \approx I_4$. Nie popełniając dużego błędu można zapisać $I_d \approx 4I_1$.
Zatem niepewność ΔI_d wynosi: $\Delta I_d = 4\Delta I_1$.

10. Po obliczeniu błędów cząstkowych znaleźć niepewność ΔI z jakim wyznaczony został moment bezwładności I:

$$\Delta I = \pm I\left(\left|\frac{\Delta I_d}{I_d}\right| + \left|\frac{2T_d^2\Delta T}{T(T_d^2 - T^2)}\right| + \left|\frac{2T_d\Delta T_d}{T_d^2 - T^2}\right|\right).$$

11. Wynik podać w postaci $I = (I_{dośw} \pm \Delta I)$.

Uzupełnienie

1. Rozkład (Studenta-Fishera) zwany też rozkładem t.

Rozkład normalny stosuje się do przypadku nieskończonej, praktycznie bardzo dużej, liczby pomiarów. Dla małej ich liczby rozkład doświadczalny tym bardziej różni się od normalnego, im mniejsza jest próbka tych pomiarów. Istnieje w statystyce matematycznej tzw. rozkład t, który pozwala ocenić tę dodatkową nieokreśloność, tym większą, im mniej wykonano pomiarów, tzn. im mniejsza jest liczba stopni swobody k ($k = n - 1$, gdzie n jest liczbą pomiarów). Rozkład t dąży do normalnego dla $k \to \infty$; dla skończonej liczby pomiarów jest bardziej płaski od normalnego. Współczynniki z rozkładu t znajduje się dla zadanego prawdopodobieństwa P. Często P nazywa się współczynnikiem (poziomem) ufności i oznacza literą α.

Niepewność pomiaru Δx wielkości zmierzonej n – krotnie jest wówczas równa:

$$\Delta x = t_{\alpha,k} \cdot s_{\bar{x}}$$

gdzie $s_{\bar{x}}$ jest średnim odchyleniem standardowym? (niepewnością wartości średniej $\bar{x}$), $t_{\alpha,k}$ to współczynnik rozkładu t dla zadanego poziomu ufności α i liczby stopni swobody k. Współczynniki $t_{\alpha,k}$ odczytujemy z odpowiedniej tablicy (patrz następna strona).

Rozkład Studenta i Fishera[1]

Wartości t_α spełniające równość $2\int_0^{t_\alpha} S(t,k)dt = \alpha$

k \ α	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	6,31	12,71	31,82	63,66	636,62
2	2,92	4,30	6,97	9,93	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
4	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
5	2,02	2,57	3,37	4,03	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,70	5,96
7	1,90	2,37	3,00	3,50	5,40
8	1,86	2,30	2,90	3,36	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,49
12	1,78	2,18	2,68	3,06	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
20	1,72	2,09	2,53	2,85	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,77
∞	1,65	1,96	2,33	2,58	3,29

Uwaga: k jest liczbą stopni swobody

[1] Tabela pochodzi z „Laboratorium fizyczne" H. Hofmokl, A. Zawadzki.