Pomiar przyśpieszenia ziemskiego za pomocą wahadła rewersyjnego

I. Cel ćwiczenia: pomiar przyśpieszenia ziemskiego przy pomocy wahadła fizycznego.

II. Przyrządy: wahadło rewersyjne, elektroniczny przyrząd do pomiaru czasu, miarka mm do pomiaru odległości.

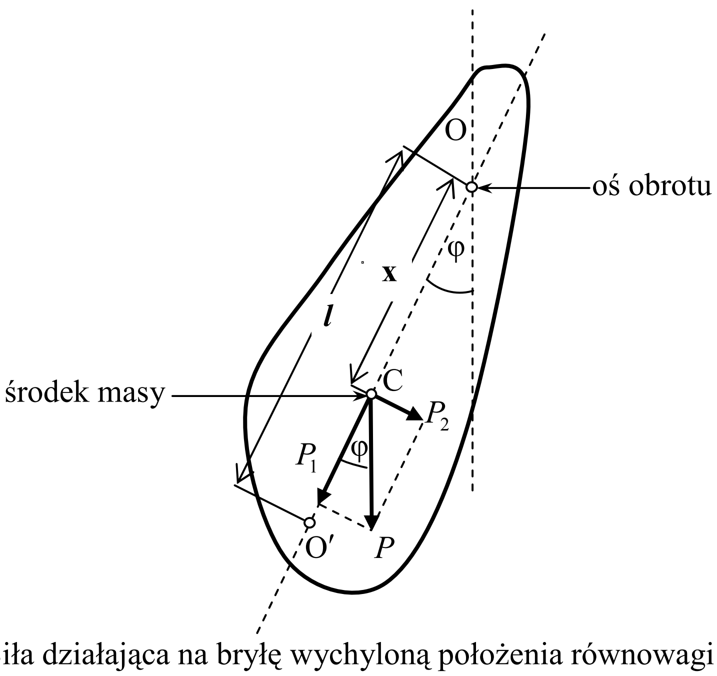
III. Literatura: [1] J. L. Kacperski, I pracownia fizyczna.

[2] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki 1.

IV. Wstęp.

Wahadłem fizycznym nazywamy każdą bryłę sztywną wahającą się pod działaniem siły ciężkości dookoła osi, nie przechodzącej przez środek masy tej bryły. Wypadkowa sił ciężkości działających na wahadło równa się ciężarowi wahadła P = mg, punktem przyłożenia tej wypadkowej jest środek ciężkości wahadła C.

Wahadło jest w równowadze wtedy, gdy jego środek ciężkości znajduje się w płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez oś obrotu O (rys.1).



Rys. 1 Siła działająca na bryłę wychyloną położenia równowagi

Na odchyloną z położenia równowagi bryłę sztywną działa moment siły (rys. 1):

$$N = -P_2\,x = -mg\,\boldsymbol{sin}\,\varphi\,x \qquad (1)$$

Dla małych kątów odchylenia φ (< 5^o) sin φ ≈ φ (gdzie kąt φ jest wyrażony w radianach) i wówczas moment siły dany jest zależnością

$$N \cong -mgx\varphi \qquad (1a)$$

Z II zasady Newtona dla ruchu obrotowego wynika równanie:

$$N = I \cdot \varepsilon = I\frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{2}$$

gdzie I oznacza moment bezwładności bryły, a ε – przyspieszenie kątowe

Momentem bezwładności bryły względem jakiejś dowolnej osi O nazywamy sumę iloczynów mas Δm małych elementów objętości bryły przez kwadraty ich odległości r od tej osi:

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

Gdy element masyΔm jest nieskończenie mały, czyli Δm → dm; wówczas moment bezwładności I jest równy

$$I = \int r^2 dm$$

Ze wzorów (1a) i (2) otrzymujemy równanie ruchu wahadła:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgx}{I}\varphi = 0 \tag{3}$$

Składowa P_2 siły ciężkości P, odpowiedzialna za ruch wahadła, jest proporcjonalna do kąta wychylenia φ z położenia równowagi (dla małych kątów). Ruch środka masy wahadła jest zatem ruchem harmonicznym prostym, który dany jest ogólnym równaniem:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0 \tag{4}$$

gdzie $\omega = \frac{2\pi}{T}$ jest częstością kątową.

Przypomnijmy w tym miejscu, że

Ruchem harmonicznym prostym nazywamy ruch drgający ciała, w którym siła działająca na to ciało jest proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi i ma zwrot przeciwny do wychylenia.

Porównując (4) z (3) mamy:

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mgx}{I} \tag{5}$$

Z ostatniego związku można znaleźć okres wahań wahadła:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgx}} \tag{6}$$

V. Metoda pomiaru

Moment bezwładności bryły o masie m względem osi równoległej do osi przechodzącej przez środek masy bryły i odległej od niej o x wyraża się znanym wzorem Steinera:

$$I = I_o + mx^2$$

gdzie I_o oznacza moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy.

Jeśli I_o przedstawić w postaci

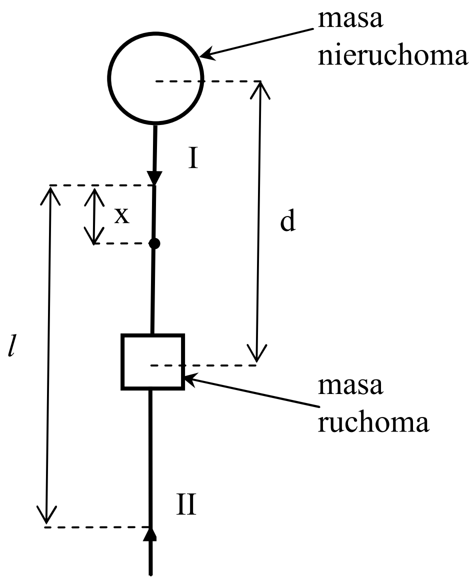
$$I_o = mk^2 \tag{7}$$

gdzie k nosi nazwę ramienia bezwładności bryły, to wyrażenie (6) uzyska postać

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mk^2 + mx^2}{mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + x^2}{gx}} \tag{8}$$

Ze wzoru (8) wynika, że okres T wahań wahadła zależy wyłącznie od odległości x środka masy od osi zawieszenia.

Wahadłem odwracalnym (rewersyjnym) nazywamy wahadło fizyczne, posiadające dwie równoległe osie zawieszenia leżące po przeciwnych stronach środka masy wahadła, którego położenie można zmieniać przesuwając ruchomą masę.



Rys. 2 Schemat konstrukcji wahadła rewersyjnego

Długość wahadła matematycznego o okresie wahań równym okresowi wahań wahadła fizycznego nazywa się długością zredukowaną. Na rys.1 tą długością jest odległość OO′ = l. Punkt O′ nosi nazwę środka wahań i posiada tę własność, że jeżeli uczynimy go osią obrotu, to okres wahań będzie taki jak w przypadku, gdy osią obrotu był punkt O.

Nas interesuje przypadek, kiedy długością zredukowaną jest odległość l miedzy pryzmatami wahadła rewersyjnego (rys.2). Wówczas wzór (8) przyjmie postać:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{9}$$

gdzie długość l równa

$$l = \frac{k^2 + x^2}{x} \tag{10}$$

nosi nazwę długości zredukowanej.
Wzór (10) można zapisać w postaci:

$$x^2 - lx + k^2 = 0 \tag{11}$$

Jest to więc równanie kwadratowe o pierwiastkach spełniających warunki (tzw. wzory Viety):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= l \\ x_1 \cdot x_2 &= k^2 \end{aligned} \tag{12}$$

Wartości x_1 i x_2 wyznaczają takie położenia środka masy względem osi obrotu, dla których długością zredukowaną jest odległość l.

W doświadczeniu badamy zależność okresu wahań od położenia masy ruchomej, mierzonego względem dowolnego punktu wahadła, np. środka masy nieruchomej lub pryzmatu jednej z osi:

$$T' = T'(d)$$

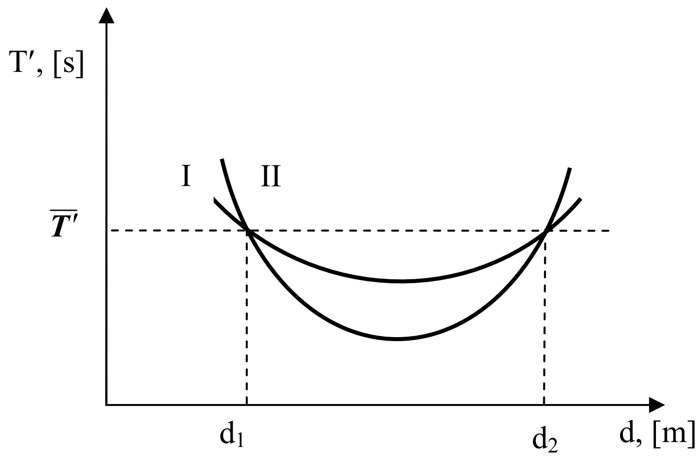
Pomiędzy odległością d ruchomej masy od wybranego punktu a odległością x od środka masy wahadła istnieje związek liniowy (patrz **Uzupełnienie**) postaci:

$$d = c_1 + c_2\, x \tag{13}$$

lub

$$x = c_1' + c_2'\, d \tag{13a}$$

gdzie c_1, c_2, c_2', c_2' są współczynnikami stałymi dla danego wahadła i ustalonego punktu odniesienia. Wobec tego krzywe doświadczalne, otrzymane dla przypadku zawieszenia wahadła na ostrzu I i II, powinny mieć także przebieg zbliżony do przewidywanego przez zależność (8)



Rys. 3 Zależność okresu wahań od położenia masy ruchomej

Ze wzoru (13) wynika, że do znalezienia takiego położenia mas dla którego odległość między pryzmatami l jest długością zredukowaną, nie jest konieczna znajomość położenia środka masy wahadła. Jeśli l jest długością zredukowaną dla odległości pomiędzy osią obrotu i środkiem masy x_1 i x_2, to odpowiednie odległości d_1 i d_2 są jednoznacznie związane z nimi wspomnianą zależnością (13). Dla tych położeń masy ruchomej zamiana osi wahań nie powoduje zmiany okresu wahań, którego wartość T znajdujemy ze wzoru (9). Dokładniej mówiąc, wzór ten jest słuszny dla nieskończenie małych wychyleń. Po wprowadzeniu poprawki uwzględniającej zależność okresu od amplitudy wyrażenie na mierzony okres T' przyjmie postać (patrz **Uzupełnienie**):

$$T' \cong T\left(1 + \frac{\varphi^2}{16}\right) \tag{14}$$

Przyśpieszenie ziemskie g obliczamy ze związku:

$$g = 4\pi^2 l \frac{\left(1 + \frac{\varphi^2}{16}\right)^2}{(T')^2} \tag{15}$$

dla $\varphi \le 0{,}1$ rad.

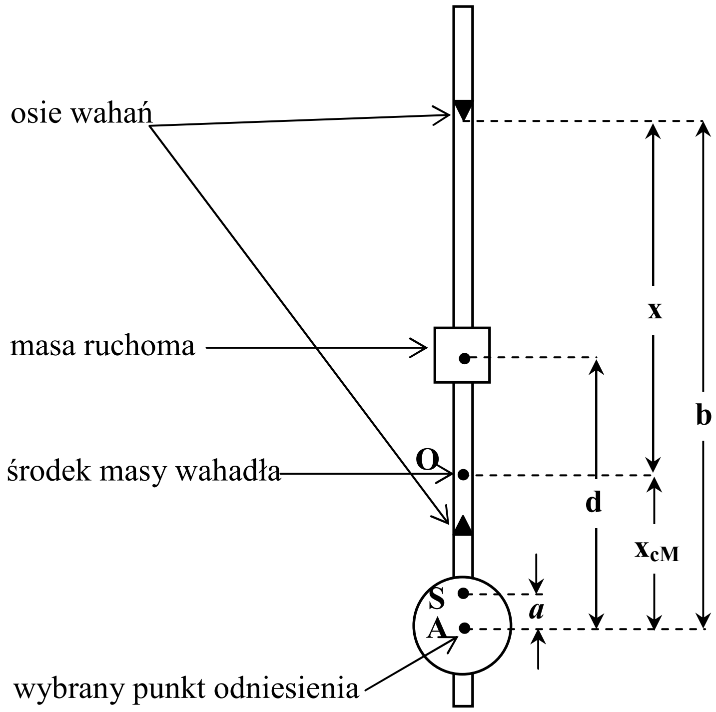
Wahadło rewersyjne, użyte po raz pierwszy przez Katera w 1817 r, stosowano później wielokrotnie do precyzyjnego wyznaczania przyspieszenia ziemskiego. Szczególnie dokładne pomiary wykonano w Poczdamie, w 1906 r. Otrzymano wówczas wartość $g = 9{,}81274\ \mathrm{m/s^2}$.

VI Pomiary i obliczenia

1. Zmierzyć odległość l między ostrzami pryzmatów I i II wahadła.
2. Ustalić punkt wahadła, względem którego będzie zmieniane położenie d masy ruchomej. Zmierzyć czas t' 10–ciu wahnięć dla pierwszego położenia masy ruchomej wahadła zawieszonego na I ostrzu pryzmatu. Zmieniając położenie d masy np. co 0,05 m, zmierzyć dla każdego położenia czas t'. Obliczyć dla każdego punktu okres $T' = t'/10$.
   Układ wahadła zawiera fotobramkę, przez którą przechodzi koniec wahadła. Umożliwia to pomiar czasu przyrządem elektronicznym (wybieramy na nim 10 okresów; istnieje możliwość wybrania 1 okresu).
3. Pomiary z punktu 2 wykonać dla wahadła zawieszonego na ostrzu II.
4. Sporządzić wykresy zależności $T'(d)$ dla wahadła zawieszonego na ostrzu I i II.
5. W oparciu o wykonane wykresy znaleźć d_1 i d_2. Zwrócić uwagę na to, że punkty te powinny mieć jednakowe rzędne.
6. Po ponownym umieszczeniu ruchomej masy m w położeniu d_1 ponownie zmierzyć czas t' 10-ciu okresów, zawieszając wahadło na ostrzu I, a następnie II. Pomiary powtarzamy dla położenia d_2 masy ruchomej. Otrzymujemy czasy: $t'_{I,1}, t'_{I,2}, t'_{II,1}, t'_{II,2}$.
7. W oparciu o otrzymane cztery wyniki znaleźć średni okres $\overline{T'}$
   $$\overline{T'} = \frac{t'_{I,1} + t'_{I,2} + t'_{II,1} + t'_{II,2}}{4 \cdot 10}$$
8. Obliczyć przyśpieszenie ziemskie g ze wzoru (15). We wzorze tym $T' = \overline{T'}$.
   Sprawdzić czy do obliczenia przyspieszenia ziemskiego g konieczne jest stosowanie wzoru (15), czy też może wystarczy skorzystać ze wzoru (9).
9. Obliczyć niepewność pomiaru przyspieszenia ziemskiego g:
   $$\Delta g = \pm g\left(\frac{\Delta \boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l}} + 2\frac{\Delta T'}{T'}\right)$$
   gdzie Δl niepewność pomiaru odległości l między ostrzami wahadła, $\Delta T'$ – niepewność pomiaru okresu T' .
   Pominięto niepewność pomiaru $\Delta\varphi$.

Uzupełnienie

1. Związek między odległością d ruchomej masy od wybranego punktu odniesienia, którym jest środek geometryczny dużej masy a odległością x środka masy wahadła od osi zawieszenia.



Rys.4 Schemat wahadła rewersyjnego z zaznaczonymi odległościami niezbędnymi do wyprowadzenia związku między d i x.

Punktem odniesienia pomiaru położenia masy ruchomej jest punkt A, będący środkiem geometrycznym dużej masy nieruchomej. Pozostałe oznaczenia:

- O – środek masy całego wahadła (łącznie z ruchomą masą),
- S – środek masy nieruchomej części wahadła (bez ruchomej masy m),
- a – odległość środka masy S nieruchomej części wahadła od wybranego punktu odniesienia A,
- b – odległość osi wahań od punktu odniesienia A,
- x – odległość środka masy O wahadła od osi zawieszenia,
- x_{cM} – odległość środka masy O od wybranego punktu odniesienia,
- M – całkowita masa wahadła,
- m – masa części ruchomej wahadła.

Z definicji środka masy znajdujemy:

$$x_{cM} = \frac{(M - m)a + md}{M} \tag{16}$$

Z rysunku 4 wynika związek:

$$b = x_{cM} + x \quad \Rightarrow \quad x_{cM} = b - x \tag{17}$$

Z tych dwu zależności po przekształceniach otrzymamy:

$$d = -\frac{M}{m}x + \frac{M}{m}(b - a) + a \tag{18}$$

Jeśli oznaczymy:

$$c_1 = \frac{M}{m}(b - a) + a, \qquad c_2 = -\frac{M}{m}, \tag{19}$$

to związek ten możemy przedstawić w postaci:

$$d = c_1 + c_2 x \tag{20}$$

Ponieważ *a* i b są dla danego wahadła odległościami stałymi, to współczynniki c_1 i c_2 są stałymi charakterystycznymi dla danego wahadła.
Jeżeli wybralibyśmy inny punkt odniesienia, np. oś wahań, również otrzymalibyśmy między d i x zależność liniową, ale współczynniki c_1 i c_2 miałyby inne wartości.

2. Poprawka na okres wahań wahadła wychylonego z położenia równowagi o kąt φ.

Okres wahań T wahadła odchylonego o nieskończenie mały kąt i okres T′ wahadła odchylonego o kąt φ pozostają ze sobą w relacji:

$$T' \cong T\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \sin^4\frac{\varphi}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2 \sin^6\frac{\varphi}{2} + \cdots\right] \tag{21}$$

Po ograniczeniu się do początkowych wyrazów rozwinięcia:

$$T' \cong T\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}\right] \tag{22}$$

Dla kątów φ mniejszych od $5^o \div 6^o$ (< 0,1 rad), sin φ ≈ φ i mamy

$$T' = T\left(1 + \frac{\varphi^2}{16}\right). \tag{23}$$