WAHADŁO FIZYCZNE ZE ZMIENNĄ OSIĄ ZAWIESZENIA

I. Cel ćwiczenia: zapoznanie z własnościami ruchu drgającego w oparciu o wahadło fizyczne, wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego g i ramienia bezwładności wahadła.

II. Przyrządy: metalowy symetryczny pręt mocowany w uchwycie, czasomierz cyfrowy, optyczny układ pomiarowy.

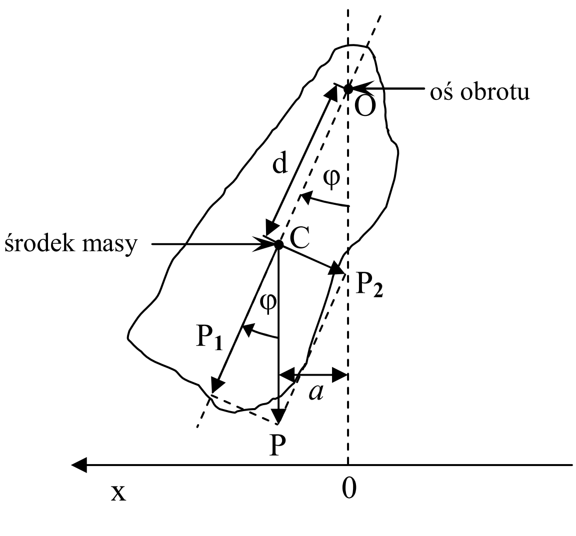
III. Literatura:
[1] J. L. Kacperski, „I Pracownia fizyczna”,
[2] B.Jaworski, A. Dietłaf i inni „Kurs fizyki” t.1,
[3] J. L. Kacperski „Opracowanie danych pomiarowych”.

IV. Wprowadzenie

Ruchem drgającym lub wprost drganiami, nazywamy każdy ruch lub zmianę stanu, które charakteryzuje powtarzalność w czasie wartości wielkości fizycznych, określających ten ruch lub stan. Wielkościami tymi mogą być np. wychylenie, prędkość, ciśnienie, napięcie itp. Drgania mogą być okresowe lub nieokresowe.

Ruch drgający nazywamy okresowym (periodycznym), jeżeli wartości wielkości fizycznych zmieniające się podczas drgań, powtarzają się w równych odstępach czasu. Przykładem takiego okresowego ruchu jest ruch wahadła fizycznego, wychylonego z położenia równowagi (kierunek pionu) o niewielki kąt φ.

Wahadłem fizycznym nazywamy każdą bryłę sztywną wahającą się pod działaniem siły ciężkości dookoła osi, nie przechodzącej przez środek masy tej bryły. Wypadkowa sił ciężkości działających na elementarne masy wahadła równa się ciężarowi wahadła P = mg, a punktem przyłożenia tej wypadkowej jest środek ciężkości wahadła C.



Rys. 1 Siła ciężkości P działająca na bryłę sztywną wychyloną z położenia równowagi o kąt φ.

Rozważmy bryłę sztywną dowolnego kształtu zawieszoną powyżej jej środka ciężkości i odchyloną z położenia równowagi o kąt φ. Zakładamy, że środek ciężkości wahadła porusza się w jednej płaszczyźnie jak również pomijamy opory ruchu (tarcie w punkcie zawieszenia, opór ośrodka). Wahadło jest w równowadze wtedy, gdy jego środek ciężkości znajduje się w

płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez oś obrotu O (rys.1). Jeśli odchylone o kąt φ wahadło przestaniemy przytrzymywać, zacznie wykonywać okresowy ruch wahadłowy, który możemy uważać za szczególny przypadek ruchu obrotowego zmiennego.
Na odchyloną z położenia równowagi bryłę sztywną działa moment siły (rys. 1):

$$N = -P_2\, d = -mg\sin\varphi\, d \tag{1}$$

Dla małych kątów odchylenia φ (< 5^o) sin $\varphi \approx \varphi$ (gdzie kąt φ jest wyrażony w radianach) i wówczas moment siły dany jest zależnością

$$N \cong -mg\varphi d \tag{1a}$$

Znak minus we wzorach (1) i (1a) oznacza, że siła P_2 zwrócona jest zawsze w kierunku położenia równowagi, tzn. zawsze ma zwrot przeciwny do wychylenia φ.
Z II zasady Newtona dla ruchu obrotowego wynika równanie:

$$N = I \cdot \varepsilon = I\frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{2}$$

gdzie I oznacza moment bezwładności bryły, a ε – przyspieszenie kątowe.

Momentem bezwładności bryły względem jakiejś dowolnej osi O nazywamy sumę iloczynów mas Δm małych elementów objętości bryły przez kwadraty ich odległości r od tej osi:

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

Gdy element masy Δm jest nieskończenie mały, czyli $\Delta m \to dm$; wówczas moment bezwładności I jest równy

$$I = \int r^2 dm$$

Ze wzorów (1a) i (2) otrzymujemy równanie ruchu wahadła:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\varphi = 0 \tag{3}$$

Składowa P_2 siły ciężkości P, odpowiedzialna za ruch wahadła, jest proporcjonalna do kąta wychylenia φ z położenia równowagi (dla małych kątów). Ruch środka masy wahadła jest zatem ruchem harmonicznym prostym, który dany jest równaniem ogólnym:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0 \tag{4}$$

gdzie $\omega = \frac{2\pi}{T}$ jest częstością kątową.

Przypomnijmy w tym miejscu, że

Ruchem harmonicznym prostym nazywamy ruch drgający ciała, w którym siła działająca na to ciało jest proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi i ma zwrot przeciwny do wychylenia.

Porównując (4) z (3) mamy:

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mgd}{I} \tag{5}$$

Z ostatniego związku można znaleźć okres wahań wahadła:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{6}$$

Zgodnie ze wzorem Steinera moment bezwładności bryły sztywnej o masie m względem osi równoległej do osi przechodzącej przez środek masy bryły sztywnej i odległej od niej o d wynosi

$$I = I_o + md^2 \tag{7}$$

gdzie I_o jest momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy.
Moment bezwładności I_o możemy przedstawić w postaci

$$I_o = m\,k^2$$

gdzie k nazywa się ***ramieniem bezwładności*** bryły sztywnej.
Po uwzględnieniu wzoru (7) na okres drgań otrzymamy zależność

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mk^2 + md^2}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + d^2}{gd}} \tag{8}$$

Jeżeli okres wahań wahadła fizycznego jest równy okresowi wahań wahadła matematycznego o długości *l*, to ta długość *l* nazywa się ***długością zredukowaną***. Mamy więc

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{k^2}{d} + d}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{9}$$

gdzie $l = \frac{k^2}{d} + d$ jest długością zredukowaną.

Minimalną wartość okresu otrzymujemy przyrównując do zera pochodną okresu T obliczoną względem zmiennej d

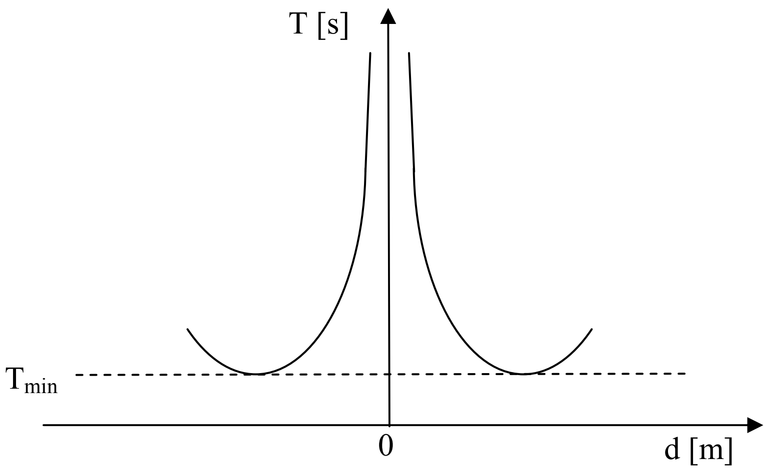
$$\frac{\partial T}{\partial d} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\left(\frac{k^2}{d} + d\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{k^2}{d^2} + 1\right) = 0$$

Ponieważ czynnik w pierwszym nawiasie tego wyrażenia jest zawsze dodatni, to pochodna jest równa zeru, gdy czynnik w drugim nawiasie równa się zeru, a zatem

$$\left(-\frac{k^2}{d^2} + 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \pm d \tag{10}$$

Stąd

$$T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{2k}{g}} \tag{11}$$



Rys. 2 Zależność okresu drgań T od odległości osi obrotu od środka ciężkości wahadła d.

Wyznaczenie minimalnego okresu drgań T_{min} z wykresu (rys. 2) pozwala na znalezienie k i g. Ponieważ jednak odczytana z wykresu wartość T_{min} obarczona jest dużym błędem, zastosujemy inną metodę, zapisując w nieco innej formie równanie (8):

$$d\,T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\,(k^2 + d^2) \qquad (12)$$

Podstawiając $y = d\,T^2$ oraz $x = d^2$ otrzymujemy prostą $y = a + bx$. Współczynniki a i b wynoszą

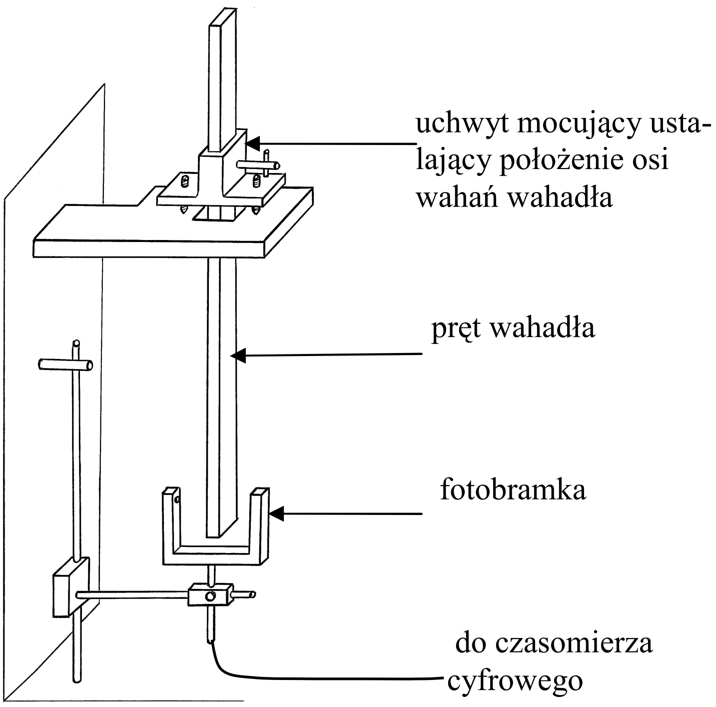
$$a = \frac{4\pi^2 k^2}{g}, \qquad b = \frac{4\pi^2}{g}$$

W tej skali funkcyjnej wyniki ułożą się w przybliżeniu wzdłuż linii prostej przecinającej oś y w punkcie $a = \dfrac{4\pi^2 k^2}{g}$. Parametry a i b można znaleźć graficznie lub metodą najmniejszych kwadratów. Przyspieszenie ziemskie g i ramię bezwładności bryły k znajdujemy wówczas ze związków:

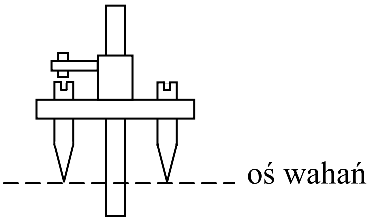
$$g = \frac{4\pi^2}{b} \quad (13a) \qquad k = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (13b)$$

V. Układ pomiarowy

Wahadłem fizycznym użytym w doświadczeniu jest symetryczny metalowy pręt o długości ok. 1,5m z podziałką co 1cm. Pręt umieszczony jest w uchwycie (rys. 4) i unieruchamiany za pomocą śruby. Dolny swobodny koniec wahadła podczas pomiaru powinien przecinać wiązkę promieniowania podczerwonego wysyłaną przez diodę elektroluminescencyjną fotobramki. Fotobramka umieszczona jest na statywie i można zmieniać jej położenie w pionie. Do fotobramki podłączony jest czasomierz elektroniczny, którym mierzy się czas zadanej liczby okresów.



Rys.3 Schemat układu pomiarowego.



Rys. 4 Uchwyt mocujący i położenie osi wahań wahadła.

VI. Pomiary

1. Sprawdzić, ile okresów wahań podlega pomiarowi przez czasomierz elektroniczny używany doświadczeniu. Jeśli przez t_n oznaczymy czas n wahnięć, to $T = t_n/n$.
2. Wyznaczyć środek masy (ciężkości) metalowego pręta (środek geometryczny pręta).
3. Ustawić pręt wahadła w taki sposób, aby odległość d osi obrotu od środka ciężkości wahadła była różna od zera. Zmieniając odległość d osi wahań od środka ciężkości co 5cm, zmierzyć wartość t_n dla danego d. Wyniki zapisać w tabeli1.

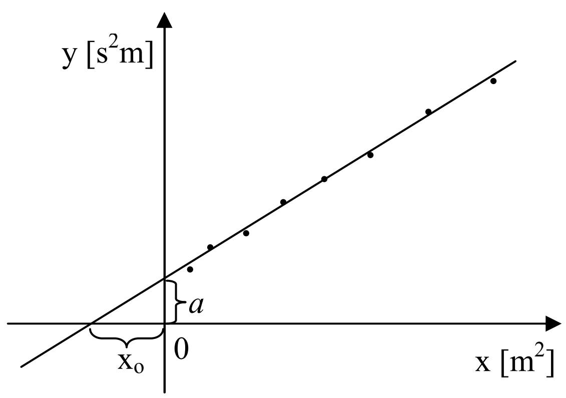
Tabela 1

Lp	d [m]	t_n [s]	$T = t_n/n$	$x = d^2 [m^2]$	$y = T^2 d$
1					
2					

Wygodnie jest rozpocząć pomiar od końca pręta przesuwając się ku jego środkowi. W pobliżu wartości d, dla której $T = T_{min}$ wskazane jest zmieniać odległość d o wartość mniejszą niż 5cm.
Pomiary wykonać także dla drugiej połowy pręta odwracając go o 180^o po zakończeniu pomiarów opisanych w tym punkcie.

VII. Opracowanie pomiarów.

1. Sporządzić wykres zależności $T = T(d)$ oraz odczytać z niego T_{min} .
2. Sporządzić wykres zależności $y = f(x)$ dla obu połówek wahadła i wyznaczyć graficznie lub metodą najmniejszych kwadratów parametry a i b (b jest współczynnikiem nachylenia prostej).



Rys. 5 Wykres wyników pomiarów w układzie współrzędnych liniowych.

3. Obliczyć przyspieszenie ziemskie g ze wzoru (13a) oraz ramię bezwładności k ze wzoru (13b). Ponieważ otrzymuje się dwie wartości g i k, obliczyć wartość średnią $\overline{g}$ i $\overline{k}$.

4. Wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów niepewności Δa i Δb.

Obliczenia a, b, Δa, Δb najłatwiej wykonać w Excelu stosując między innymi odpowiednią opcję „Kreatora wykresów”. Można też użyć innego narzędzia posiadającego opcję dopasowywania funkcji teoretycznej do danych doświadczalnych np. ORIGIN.
Niepewności pomiarowe przyspieszenia g i ramienia bezwładności k wynoszą

$$\Delta g = \pm g \frac{\Delta b}{b} \qquad \Delta k = \pm \frac{1}{2} k \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \right)$$

Uwaga

Niepewności pomiarowe ΔT i Δd wynoszą: $\Delta T = \frac{\Delta t_n}{n} \leq 1\text{ms}$, $\Delta d = 0{,}002\text{m}$. Względne niepewności $\frac{\Delta T}{T}$ i $\frac{\Delta d}{d}$ dla poszczególnych punktów pomiarowych są zbyt małe by ΔT i Δd można w każdym przypadku zaznaczyć na wykresie 2. Z tego samego powodu kłopotliwe będzie zaznaczenie niepewności pomiarowych Δx i Δy na wykresie 5 ($\Delta y = \pm y \left(\frac{2\Delta T}{T} + \frac{\Delta d}{d}\right)$ i $\Delta x = \pm 2\, x \frac{\Delta d}{d}$). Stąd też graficzne wyznaczenie niepewności Δa i Δb będzie bardzo trudne.
W rozważaniach pominięto masę zamocowania pręta, pozwalającego przesuwać oś wahań. Masa ta jest co prawda znacznie mniejsza od masy pręta (co najmniej o rząd wielkości), lecz nie uwzględnienie jej wprowadza pewien stały błąd systematyczny.