

WYZNACZANIE MOMENTU BEZWŁADNOŚCI KRAŻKA

- I. Cel ćwiczenia:** zapoznanie się z teorią momentu bezwładności. Wyznaczenie momentu bezwładności bryły względem osi obrotu z siłą tarcia i bez tej siły, wyznaczenie momentu sił tarcia.
- II: Przyrządy:** krążek metalowy stanowiący badaną bryłę sztywną, dwa ciężarki w kształcie walca (mały i duży), miarka centymetrowa umieszczona na statywie, waga laboratoryjna, suwmiarka, stoper.
- III. Literatura:**
1. J. L. Kacperski, „I Pracownia fizyczna”.
 2. A. Piekara „Mechanika ogólna” roz. VII – Dynamika bryły sztywnej.
 3. Instrukcja pracowniana M-4, „Wyznaczanie momentu bezwładności bryły metodą drgań skrętnych”.

IV. Wprowadzenie

Bryłą sztywną nazywamy ciało, w którym odległość między dwoma dowolnie wybranymi punktami jest stała i nie zmienia się pod wpływem przyłożonych do niego sił zewnętrznych, jeśli tylko nie są one zbyt wielkie. Bryła sztywna jest szczególnym układem punktów materialnych, w którym odległości między punktami są stałe.

Momentem bezwładności bryły względem jakiejś dowolnej osi O nazywamy sumę iloczynów mas Δm małych elementów objętości bryły przez kwadraty ich odległości r od tej osi:

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \quad (1)$$

Gdy element masy Δm jest nieskończenie mały, czyli $\Delta m \rightarrow dm$, to wówczas moment bezwładności I jest równy

$$I = \int_m r^2 dm \quad (1a)$$

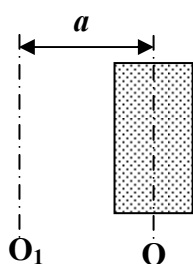
Wykorzystując wzór (1a) możemy obliczać momenty bezwładności brył o prostym, regularnym kształcie geometrycznym, obracających się względem osi wyróżnionej przez symetrię bryły.

Wielkość momentu bezwładności danej bryły jest zależna od tego, wokół jakiej osi następuje jej obrót. Moment bezwładności bryły złożonej z kilku elementów jest równy sumie momentów bezwładności tych elementów bryły względem tej samej osi, co wynika z definicji momentu bezwładności (np. moment bezwładności „hantli”, która składa się z dwóch kul o równych masach połączonych prętem względem osi przechodzącej przez środek pręta wynosi $I_c = 2I_k + I_p$, gdzie I_k , I_p są odpowiednio momentem bezwładności kuli i momentem bezwładności łączącego je pręta względem tej osi).

Moment bezwładności względem dowolnej osi wyznacza się często korzystając z twierdzenia Steinera, które brzmi:

Moment bezwładności I bryły względem dowolnej osi O_1 jest równy sumie momentu bezwładności I_0 względem osi O przechodzącej przez środek masy bryły i równoległej do osi O_1 oraz iloczynu masy m bryły i kwadratu odległości a między osiami:

$$I = I_o + m a^2 \quad (2)$$



Rys.1 Bryła o masie m posiadająca oś O przechodzącą przez środek masy i dowolna oś O_1 .

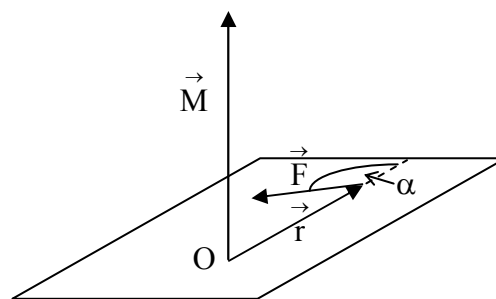
W przypadku nietypowego kształtu bryły obliczenie momentu bezwładności związane jest z kłopotliwymi obliczeniami. W takich przypadkach moment bezwładności wyznacza się doświadczalnie wykorzystując własności drgań skrętnych.

W dynamice ruchu obrotowego posługujemy się pojęciem momentu siły. Momentem \vec{M} siły \vec{F} względem punktu O nazywamy iloczyn wektorowy promienia wodzącego \vec{r} oraz siły \vec{F} . Promień \vec{r} ma początek w punkcie O a koniec w punkcie przyłożenia siły:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3)$$

Jego kierunek jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektor \vec{F} i promień wodzący \vec{r} a wartość jest równa: $M = r \cdot F \cdot \sin \alpha$, gdzie α jest kątem między wektorami \vec{r} i \vec{F} .

Moment siły względem osi obrotu (w przypadku ruchu obrotowego) jest równy iloczynowi wektorowemu promienia wodzącego \vec{r} reprezentującego odległość punktu przyłożenia siły od osi obrotu i siły przyłożonej.



Rys.2 Moment siły – ilustracja iloczynu wektorowego $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

V. Pomiar momentu siły tarcia

Bryłą badaną w doświadczeniu jest krążek metalowy, którego kontury schematycznie pokazuje rys.3. Na krążek może nawijać (odwijać) się sznurek z zawieszoną na końcu masą m . Przypuśćmy, że opadanie masy m rozpoczęło się na wysokości h'_1 (wysokość mierzona jest względem wybranego poziomu h_0 , którym może być położenie masy m w przypadku całkowitego odwinnięcia nici). Całkowita początkowa energia układu w momencie rozpoczęcia ruchu jest równa energii potencjalnej:

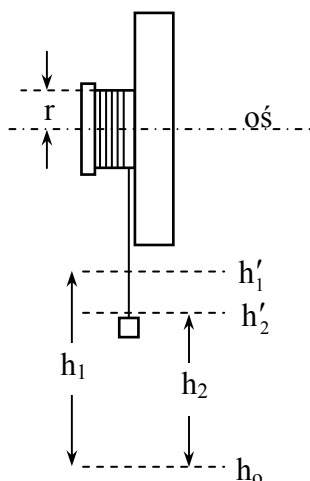
$$E_{\text{pocz.}} = mgh_1 \quad (4)$$

gdzie $h_1 = h'_1 - h_0$

Podczas opadania badanej masy energia potencjalna maleje, a rośnie energia kinetyczna układu złożonego z ciężarka i krążka. Po odwinięciu nici energia potencjalna osiąga wartość 0, a energia kinetyczna, związana z ruchem postępowym opadającej masy i ruchem obrotowym krążka ma wartość maksymalną:

$$E_{\text{końc.}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (5)$$

gdzie $\frac{mv^2}{2} = E_m$ jest energią kinetyczną ruchu postępowego masy m a $\frac{I\omega^2}{2} = E_k$ energią kinetyczną ruchu obrotowego krążka.



Rys.3 Schemat układu do pomiaru momentu bezwładności bryły z uwzględnieniem tarcia

Energie E_{pocz} i E_{konc} (początkowa i końcowa) byłyby sobie równe, gdyby nie tarcie, powodujące zużycie części energii mechanicznej na ogrzanie krążka, nici, powietrza itp. Przy dalszej analizie zaniedbamy opór powietrza, tarcie nici o krążek, a także ogrzewanie nici przy rozciąganiu, uważając ją za nieważką i nierozciągliwą i ograniczymy się do rozpatrzenia tarcia krążka o oś. Kolejnym uproszczeniem będzie przyjęcie założenia, że moment M sił tarcia nie zależy od prędkości. Z zasady zachowania energii i pracy wynika wówczas równanie:

$$mgh_1 = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + M\varphi_1 \quad (6)$$

gdzie $M\varphi_1$ jest pracą wykonaną przez krążek przeciwko siłom tarcia, φ_1 oznacza całkowity kąt, o jaki obrócił się krążek podczas przebywania przez masę m drogi h_1 .

Oczywiście $\varphi_1 = 2\pi n_1$, gdzie n_1 oznacza liczbę obrotów krążka. Podobnie oczywisty jest związek:

$$h_1 = 2\pi r n_1 = \varphi_1 r \quad (7)$$

Po osiągnięciu przez masę m najniższego poziomu, role ulegają niejako odwróceniu i teraz krążek wykonuje pracę, pokonując tarcie i podnosząc masę m aż do wysokości $h_2 < h_1$. Ułożymy znowu bilans energii, pamiętając o tym, że dotychczasowy stan „końcowy” stał się teraz stanem „początkowym”. Energia masy m nie ulega zmianie (zmienił się tylko zwrot prędkości):

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = mgh_2 + M\varphi_2 \quad (8)$$

Pomiędzy wysokością h_2 i całkowitym kątem obrotu φ_2 istnieje związek analogiczny do (7):

$$h_2 = \varphi_2 r \quad (9)$$

Wykorzystanie równań (6) – (9) pozwala na wyznaczenie momentu sił tarcia:

$$M = mgr \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \quad (10)$$

VI. Pomiar momentu bezwładności krążka

VI.1 Pomiar momentu bezwładności krążka z uwzględnieniem siły tarcia

W celu wyznaczenia momentu bezwładności bryły rozpatrzmy równanie ruchu masy m (rys. 4):

$$ma = P - N' = mg - N' \quad (11)$$

gdzie a jest przyspieszeniem masy m , równym przyspieszeniu liniowemu punktu styczności nici i walca, N' jest siłą z jaką nić działa na poruszającą się masę.

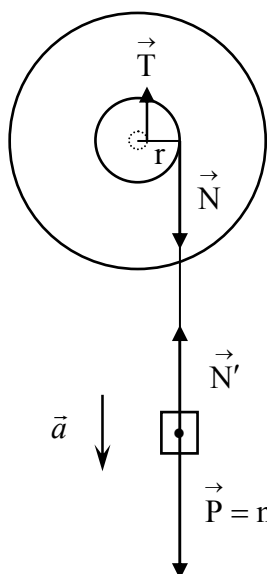
Masa m napina nić siłą N (naprężenie nici) i mamy $N' = N$ (z III zasady Newtona). Naprężenie nici wynosi więc:

$$N = mg - ma = m(g - a) \quad (11a)$$

Przyspieszenie liniowe a związane jest z przyspieszeniem kątowym ε znaną zależnością:

$$a = \varepsilon r \quad (12)$$

W punkcie styczności walca z nicią przyłożona jest siła N , której moment jest równy $r \cdot N$. Pamiętajając, że oprócz tego momentu, działa jeszcze moment M sił tarcia, możemy zapisać równanie ruchu krążka w postaci:



Rys.4 Siły występujące podczas ruchu układu krążek – masa.

$$I \varepsilon = rN - M \tag{13}$$

Z tego równania można znaleźć moment bezwładności:

$$I = \frac{rN - M}{\varepsilon} = \frac{[mr(g - a) - M]r}{a} \tag{14}$$

Przyspieszenie liniowe a znajdujemy mierząc czas, w którym masa m przebywa ruchem jednostajnie przyspieszonym drogę h_1 :

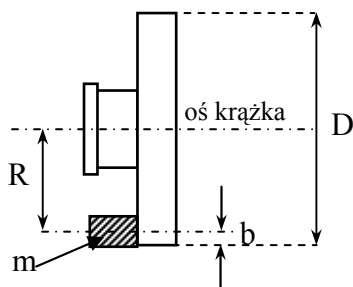
$$h_1 = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2h_1}{t^2} \tag{15}$$

Z równań (10), (14) i (15) znajdujemy końcowe wyrażenie na moment bezwładności:

$$I = mr^2 \left[\frac{gt^2}{2h_1} \left(1 - \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \right) - 1 \right] \tag{16}$$

VI.2 Pomiar momentu bezwładności krążka metodą oscylacji

Zaniedbanie sił tarcia pozwala na obliczenie momentu bezwładności alternatywną metodą, obciążoną jednak błędem systematycznym.



Rys.5 Schemat układu do pomiaru momentu bezwładności bryły z pominięciem tarcia

Tym razem masa m umieszczona jest na obwodzie badanego krążka (rys.5). Powoduje to pojawienie się położenia równowagi trwałej. Wychylenie krążka o mały kąt φ z położenia równowagi zapoczątkuje drgania opisywane równaniem:

$$(I + I_1) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgR \sin \varphi \approx -mgR\varphi \tag{17}$$

I_1 oznacza tutaj moment bezwładności dodatkowej masy m , mierzony względem osi obrotu krążka, R jest odległością osi obrotu krążka od osi zamocowania dodatkowej masy m .

Wykorzystując zasadę Steinera można obliczyć moment bezwładności I_1 (dodatkowa masa ma formę walca o promieniu r_1):

$$I_1 = \frac{mr_1^2}{2} + mR^2 = m \left(\frac{r_1^2}{2} + R^2 \right) \tag{18}$$

Jeżeli równanie (17) zapiszemy w równoważnej postaci:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgR}{I + I_1} \varphi = 0 \tag{19}$$

to można w nim łatwo rozpoznać równanie ruchu harmonicznego o częstotliwości kołowej:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgR}{I + I_1}} \quad (20)$$

Wykorzystując wzór (18), znajdujemy moment bezwładności krążka:

$$I = \frac{mgRT^2}{4\pi^2} - I_1 = m \left(\frac{gRT^2}{4\pi^2} - \frac{r_1^2}{2} - R^2 \right) \quad (21)$$

VII. Pomiary

a) Pierwsza część ćwiczenia.

1. Wyznaczyć masę odważnika m (mniejszy walec).
2. Wyznaczyć promień walca r , na który nawija się nić, mierząc jego średnicę d .
3. Określić poziom h_0 i poziom h'_1 . Ustalić odległość $h_1 = h'_1 - h_0$ (maksymalny przyrost długości odwiniętej nici mierzony od momentu rozpoczęcia opadania masy m).
4. Zmierzyć kilkakrotnie odległość h_2 ($h_2 = h'_2 - h_0$) i wyznaczyć wartość średnią \bar{h}_2 .
5. Zmierzyć kilkakrotnie czas t opadania masy m z wysokości h_1 i wyznaczyć wartość średnią \bar{t} .

Wyniki zebrać w tabeli 1:

Tabela 1

masa m [kg]	średnica walca d [mm]	promień wal- ca $r = d/2$ [mm]	odległość $h_1 = h'_1 - h_0$ [cm]	czas opa- dania t [s]	odległość h_2 $h_2 = h'_2 - h_0$ [cm]

b) Druga część ćwiczenia.

1. Wyznaczyć masę odważnika m (większy walec).
2. Zmierzyć średnicę d_1 dodatkowego większego walca i obliczyć jego promień r_1 .
3. Wyznaczyć odległość R (odległość osi obrotu krążka od osi zamocowania dodatkowej masy m).

W tym celu zmierzyć średnicę krążka D (dużą suwmiarką) i odległość b – odległość osi zamocowania dodatkowej masy m od zewnętrznej krawędzi krążka (rys. 5). Odległość R znajdujemy jako:

$$R = \frac{D}{2} - b$$

4. Zmierzyć czas t 20 wahań krążka i znaleźć okres T .

Wyniki zebrać w tabeli 2:

Tabela 2

masa m większego walca [kg]	średnica walca d_1 [mm]	promień walca $r_1 = d_1/2$ [mm]	średnica krążka D [mm]	odległość b [mm]	odległość $R = D/2 - b$ [mm]	czas t 20 waha- nięć [s]	okres T $t/20$ [s]

VIII. Opracowanie i rachunek błędów

1. Obliczyć w oparciu o wzór (10) moment M siły tarcia.
2. Korzystając z metody różniczki zupełnej można wyznaczyć niepewność momentu ΔM ze wzoru:

$$\Delta M = M \left[\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{2h_2 h_1}{h_1^2 - h_2^2} \left(\frac{\Delta h_1}{h_1} + \frac{\Delta h_2}{h_2} \right) \right]$$

3. Obliczyć ze wzoru (14) moment bezwładności I krążka.
4. Zastosowanie metody różniczki zupełnej do wyznaczenia niepewności pomiarowej ΔI w tym przypadku jest zbyt czasochłonne (wzór jest dość złożony). Można oszacować maksymalną niepewność ΔI wyznaczonego momentu bezwładności ze wzoru:

$$\Delta I = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2}$$

gdzie

$$I_{\max} = mr^2 \left[\frac{g(t + \Delta t)^2}{2(h_1 - \Delta h)} \left(1 - \frac{(h_1 - h_2) - 2\Delta h}{h_1 + h_2} \right) - 1 \right]$$

$$I_{\min} = mr^2 \left[\frac{g(t - \Delta t)^2}{2(h_1 + \Delta h)} \left(1 - \frac{(h_1 - h_2) + 2\Delta h}{h_1 + h_2} \right) - 1 \right]$$

Największy wpływ na niepewność wyznaczenia ΔI mają niepewności pomiarowe Δt i Δh ($\Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta h$). Pominięto wpływ niepewności Δm i Δr .

5. Obliczyć moment bezwładności I krążka ze wzoru (21) (metoda oscylacji).
W tym przypadku, w związku z pominięciem tarcia, oczekujemy systematycznego zawyżenia wyniku.
6. Oszacować maksymalną niepewność ΔI wyznaczonego metodą oscylacji momentu bezwładności podobnie jak w punkcie 4:

$$\Delta I = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2}$$

gdzie

$$I_{\max} = m \left[\frac{g(R + \Delta R)(T + \Delta T)^2}{4\pi^2} - \frac{r_1^2}{2} - (R + \Delta R)^2 \right]$$

$$I_{\min} = m \left[\frac{g(R - \Delta R)(T - \Delta T)^2}{4\pi^2} - \frac{r_1^2}{2} - (R - \Delta R)^2 \right]$$

Największy wpływ na niepewność wyznaczenia ΔI mają niepewności pomiarowe Δt i ΔR , a niewielkie niepewności Δm i Δr_1 i dlatego pominięto je przy szacowaniu wartości I_{\max} i I_{\min} .