

BADANIE FAL STOJĄCYCH

- I. Cel ćwiczenia:** wyznaczanie prędkości rozchodzenia się fali w napiętej nici oraz związku dyspersyjnego dla fal stojących.
- II. Przyrządy:** generator funkcyjny KZ-1405 lub generator mocy, częstotściomierz cyfrowy, głośnik dynamiczny, waga analityczna.
- III. Literatura:**
1. F. C. Crawford, – "Fale".
 2. S. Szczeniowski, – "Fizyka doświadczalna" t. I. Mechanika.
 3. T. Karman, M. A. Biot, – "Metody matematyczne w technice".

IV. Wprowadzenie

IV.1. Fale stojące - ujęcie matematyczne

Doskonale giętka i sprężysta struna, napięta w stanie równowagi siłą F znajduje się w ośrodku, który nie stawia oporu jej drganiom. Jeżeli spowodujemy krótkotrwałe, bardzo małe odchylenie fragmentu tej struny od stanu równowagi, to składowa F_y siły wypadkowej, dążącej do przywrócenia stanu równowagi będzie równa (zgodnie z oznaczeniami i orientacją osi, przyjętymi na rys.1) :

$$F_y = F_{2y} - F_{1y} = F_2 \sin \alpha_2 - F_1 \sin \alpha_1 \quad (1)$$

Jeżeli wychylenie z położenia równowagi jest b. małe, to możemy przyjąć, iż

$$F_1 \approx F_2 \approx F$$

oraz

$$\sin \alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 \quad \text{i} \quad \sin \alpha_2 \approx \operatorname{tg} \alpha_2$$

co pociąga za sobą

$$F_y = F(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1) \quad (2)$$

Ponieważ α_1 i α_2 są kątami nachylenia stycznych do struny względem osi OX w punktach o współrzędnych x i $x + \Delta x$, to

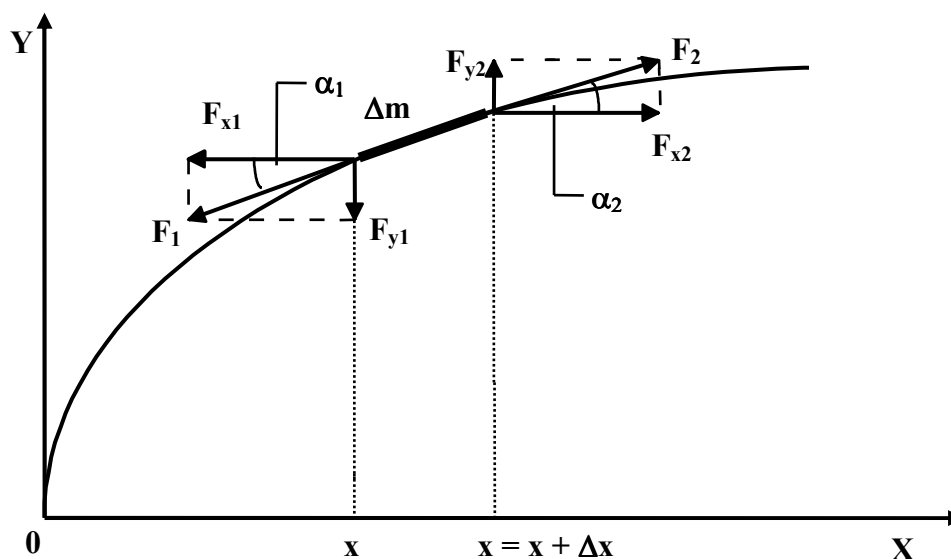
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_x \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x+\Delta x} \quad (3)$$

W związkach tych celowo użyto symboli pochodnych cząstkowych, gdyż wychylenie struny z położenia równowagi jest funkcją nie tylko współrzędnej x ale i czasu t :

$$y = y(x, t)$$

Podstawiając (3) do (2) otrzymamy

$$F_y = F \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right] = F [f'(x + \Delta x, t) - f'(x, t)] \quad (4)$$



Rys 1

Rozwijając funkcję $f'(x + \Delta x, t)$ zawartą w nawiasie kwadratowym w szereg Taylora

$$f'(x + \Delta x, t) = f'(x, t) + \frac{f''(x, t)}{1} \Delta x + \frac{f'''(x, t)}{1 \cdot 2} \Delta x^2 + \dots$$

i odrzucając wyrażenia wyższych rzędów (zgodnie z przyjętym założeniem b. małych odchyień od stanu równowagi) dochodzimy do zależności:

$$F_y = F \frac{f''(x, t)}{1} \Delta x = F \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Delta x. \quad (5)$$

W momencie zaniku sił powodujących wychylenie z położenia równowagi element struny zacznie się poruszać z przyspieszeniem o składowej pionowej

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

i zgodnie z II zasadą dynamiki $F_y = \Delta m \cdot a_y = \Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Po uwzględnieniu równania (5) mamy

$$F \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Delta x = \Delta m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}, \quad (6)$$

gdzie $\Delta m = \rho_l \cdot \Delta x$ jest masą elementu zaś ρ_l - masą jednostki długości struny czyli tzw. gęstością liniową.

Otrzymujemy stąd równanie dla fal poprzecznych w strunie

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{F}{\rho_l} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}, \quad (7)$$

w którym to równaniu wielkość F / ρ_l jest równa kwadratowi prędkości fali v . A zatem

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (8)$$

i

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}} \quad (9)$$

Ograniczmy nasze rozważania do fal będących drganiami harmonicznymi. W takim przypadku jedną z funkcji spełniających równanie (7) powinna być funkcja postaci

$$y(x,t) = A(x)\sin\omega t \quad (10)$$

gdzie $A(x)$ oznacza amplitudę drgań, natomiast $\omega = 2\pi/T$ jest częstością kołową, a T – okresem drgań. Jak wynika z (10) założyliśmy wstępnie, że amplituda zależy od współrzędnej x elementu struny. Różniczkując dwukrotnie (10) odpowiednio względem t i x otrzymamy po podstawieniu wyników do równania (7) nowe równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} + \frac{\rho_l}{F} \omega^2 A(x) = 0, \quad (11)$$

którego ogólnym rozwiązaniem jest funkcja postaci

$$A(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\rho_l}{F}} \omega \cdot x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\rho_l}{F}} \omega \cdot x\right) \quad (12)$$

gdzie C_1 i C_2 są stałymi wyznaczanymi z warunków brzegowych.

Ponieważ struna umocowana jest z obu stron do sztywnych elementów, to amplituda drgań musi przyjmować wartości zerowe dla początku struny $x = 0$ i dla jej końca $x = l$. W takim razie

$$A(x=0) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\rho_l}{F}} \omega \cdot 0\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\rho_l}{F}} \omega \cdot 0\right)$$

co pociąga za sobą równość $C_1 = 0$

a po uwzględnieniu warunku $A(x=l) = 0$ także zależność

$$C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\rho_l}{F}} \omega \cdot l\right) = 0$$

co prowadzi do wzoru:

$$\sqrt{\frac{\rho_l}{F}} \omega \cdot l = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Ze wzoru tego wynika, iż zamocowana obustronnie w sposób sztywny idealna struna o długości l , napięta w stanie równowagi siłą F może wykonywać drgania poprzeczne o postaci niezależnej od czasu i o częstościach kołowych spełniających równość

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{F}{\rho_l}} \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

i amplitudzie będącej funkcją współrzędnej x , określonej wzorem

$$A(x) = c_n \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

gdzie c_n jest pewną stałą.

Taki rodzaj drgań nazywamy falami stojącymi lub drganiami normalnymi układu. Punkty, w których amplituda drgań jest stale równa zero nazywamy węzłami, zaś punkty, w których amplituda drgań przyjmuje kolejno wartości maksymalne i minimalne – strzałkami. Każdy punkt struny oscyluje z taką samą częstością $f = \omega/2\pi$ i z taką samą fazą. Częstości drgań normalnych tworzą ciąg tzw. harmonicznym. Harmoniczną posiadającą najniższą częstość i najdłuższą falę nazywamy podstawową. W omawianym przypadku częstość i długość fali podstawowej harmonicznym określają wzory:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho_l}} \quad (16)$$

$$\lambda_1 = 2l \quad (17)$$

Związek między częstością drgań, a ich długością fali nazywamy związkiem dyspersyjnym:

$$f = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}} \frac{1}{\lambda} \quad \text{lub} \quad \omega = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}} \cdot k \quad (18)$$

gdzie $k = 2\pi/\lambda$ jest tzw. kątową liczbą falową. O falach, które spełniają związek dyspersyjny typu $\omega/k = \text{constans}$ mówimy, iż nie ulegają dyspersji.

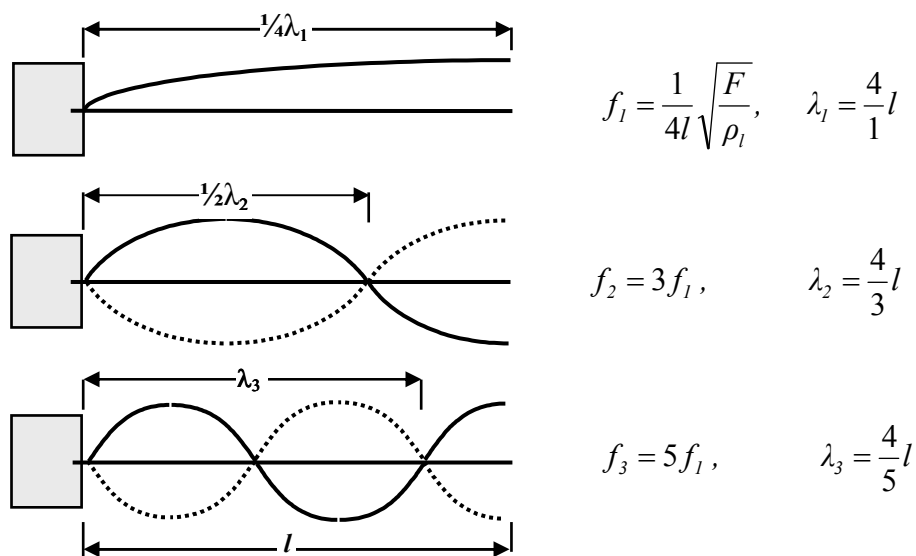
IV.2. Fale stojące – ujęcie fenomenologiczne¹

Przypuśćmy, iż na początek struny umocowanej jednostronnie działamy siłą powodującą powstawanie fali drgań harmonicznym, biegnącej w kierunku swobodnego końca struny. Biegająca w strunie fala dostarcza w sposób ciągły energię do elementu stanowiącego koniec struny. W elemencie tym energia nie może gromadzić się w sposób nieograniczony - ilość energii dopływającej musi być równa energii odpływającej. Odpływ energii jest możliwy dzięki powstawaniu fal odbitych, biegnących w kierunku odwrotnym do fal wytwarzanych przez pierwotne źródło fal. Długość, częstość i amplituda fali są w tym przypadku takie same, jak dla fali padającej - mówimy, iż fala podczas odbicia nie zmienia swojej fazy.

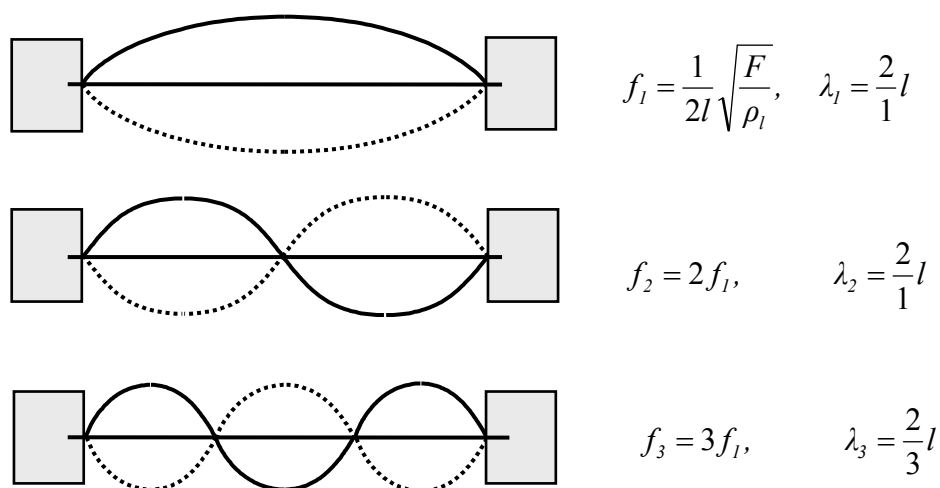
Nieco inaczej odbija się fala biegnąca w strunie zamocowanej sztywno z obu końców - amplituda fali odbitej posiada tą samą wartość bezwzględną, co amplituda fali padającej ale jest przeciwnego znaku - mówimy, iż w wyniku odbicia fala zmienia fazę na przeciwną ($\Delta\varphi = \pi$). Wynika to bezpośrednio z faktu, iż amplituda wypadkowego drgania musi być równa zero w punkcie sztywnego zamocowania struny. Fala padająca i odbita interferują ze sobą wytwarzając dla ściśle określonych częstości drgania o postaci niezależnej od czasu czyli fale stojące.

Warunkiem wytwarzania fali stojącej jest powstanie strzałki na swobodnym końcu struny, węzła w punkcie umocowania i "zmieszczenia się" całkowitej liczby "połówek" długości fali na całej długości struny umocowanej obustronnie lub nieparzystej liczby "ćwiartek" długości fali dla struny umocowanej jednostronnie.

¹ Fenomenologia – metoda badań filozoficznych polegająca na opisie i oglądzie tego, co bezpośrednio dane. Świadomość ma traktować świat wyłącznie jako fenomeny, zjawiska – bez domysłów, teorii, spekulacji.



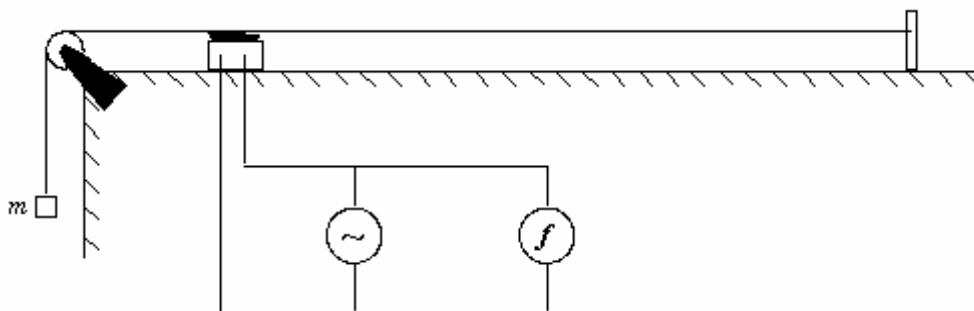
Rys.2 Postacie fal stojących dla struny zamocowanej jednostronnie.



Rys.3 Postacie fal stojących dla struny zamocowanej obustronnie.

V. Pomiary. Fale stojące w napiętej nici

Niść, której jeden koniec umocowany jest sztywno, a drugi obciążony znaną masą m powinna opierać się w jednym punkcie o górną krawędź tekturowego walca głośnika dynamicznego. Uzwojenie głośnika łączymy bezpośrednio z wyjściem napięcia zmiennego sinusoidalnie generatora funkcyjnego o impedancji wyjściowej 50Ω . Gniazdo impulsów synchronizacji (wyzwalania), usytuowane na tylnej ścianie generatora funkcyjnego łączymy z wejściem częstotściomierza cyfrowego (np. PFL 30), który służyć nam będzie do dokładnego pomiaru częstości napięcia podawanego na głośnik. Amplitudę i częstość tego napięcia dobieramy tak, aby wytworzyć w nici falę stojącą o wyraźnie wyodrębnionych węzłach i strzałkach. Schemat układu pomiarowego pokazuje rys.4.



Rys.4 Układ do badania fal stojących w napiętej nici.

Pomiary przeprowadzić wg następującego schematu:

1. Wyznaczyć masę m_0 szalki przywiązanej do końca nici.
2. Korzystając z wagi analitycznej wyznaczyć masę m' próbki nici używanej w doświadczeniu oraz jej długość l .
3. Obciążyć szalkę masą m , umieszczając na niej odważnik o znanej masie.
4. Ustawić głośnik z membraną tak, by sztywna jej krawędź mogła w trakcie drgań pobudzać nić do drgań. Zmierzyć długość nici l od końca jej sztywnego zamocowania do punktu oparcia o górną krawędź tekturowego walca głośnika dynamicznego.
5. Zmieniając częstotliwość f napięcia generatora (służy do tego odpowiednie pokrętło na płycie czołowej generatora) uzyskać kolejne fale stojące zawierające $n = 1, 2, 3, \dots$ połówek fal na długości nici l .
Fale stojące powstaną tylko dla pewnych częstotliwości drgań membrany (generatora). Im ta częstotliwość będzie większa, tym mniejsza będzie obserwowana amplituda drgań. Dlatego przy większej częstotliwości drgań należy zwiększać, w razie potrzeby, amplitudę napięcia wyjściowego generatora.
6. Pomiary z punktu 5 przeprowadzić dla dwóch innych wartości mas m obciążających szalkę (dwóch innych sił napinających nić).
7. Dla największej z tych sił napinających wyznaczyć dodatkowo zależność długości fali stojącej od częstotliwości napięcia zasilającego głośnik falą prostokątną. Sprawdzić szczególnie dokładnie, czy fale stojące powstają również przy częstotliwościach kilkakrotnie mniejszych od częstotliwości podstawowej (dla danej siły) drgań nici.

Wszystkie wyniki można zebrać w tabelach 1 – 3

VI. Opracowanie wyników

1. Dla każdej z wartości siły napinającej F wykreślić zależność częstości kołowej ω od kątovej liczby falowej k . Zgodnie ze wzorem (18) powinna to być zależność liniowa typu $y = ax + b$ ($y = \omega$, $x = k$). Obliczyć metodą najmniejszych kwadratów współczynnik kierunkowy a prostej oraz jego niepewność Δa . Wartość prędkości fali v jest równa temu współczynnikowi: $v = a$.
2. Znając wartość siły napinającej F i liniową gęstość ρ_l nitki, w oparciu o wzór (9) obliczyć prędkość fali v :

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}$$

Niepewność Δv prędkości fali w tej metodzie jest równa:

$$\Delta v = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m_o}{m_o + m} + \frac{\Delta m}{m_o + m} + \frac{\Delta m'}{m'} + \frac{\Delta l'}{l'} \right)$$

gdzie Δm_o – niepewność wyznaczenia masy szalki, Δm – niepewność wyznaczenia masy m położonej na szalce, $\Delta m'$ – niepewność pomiaru masy m' próbki nici, $\Delta l'$ – niepewność pomiaru długości próbki nici l'

Porównać wartości prędkości otrzymane tymi dwoma metodami.

3. Zinterpretować wyniki doświadczenia z głośnikiem zasilanym prostokątną falą napięcia.
4. Zamieścić w sprawozdaniu dyskusję uzyskanych wyników.

Tabela 1

masa szalki m_0 [kg]	masa próbki nici m' [kg]	długość próbki nici l' [m]	gęstość linio- wa nici $\rho_l = m'/l'$	masa odważników położo- nych na szalce		
				m_1 [kg]	m_2 [kg]	m_3 [kg]

Tabela 2

siła napinająca nić $F_1 = (m_1 + m_0)g$ [N] :				
długość nici l [m] :				
częstotliwość f [Hz]	częstość kołowa $\omega = 2\pi f$ [1/s]	liczba połówek fal na długości l n	długość fali $\lambda = 2l/n$	liczba falowa $k = 2\pi/\lambda$
siła napinająca nić $F_2 = (m_2 + m_0)g$ [N] :				
długość nici l [m] :				
siła napinająca nić $F_3 = (m_3 + m_0)g$ [N] :				
długość nici l [m] :				

Tabela 3

siła napinająca nić $F_3 = (m_3 + m_0)g$ [N] :		
długość nici l [m] :		
częstotliwość fali prostokątnej f [Hz]	liczba połówek fal na długości l n	długość fali $\lambda = 2l/n$

VII. Fale stojące w liniach przesyłowych

(rozszerzenie mechanicznej części ćwiczenia M-14. Aby wykonać również tę część ćwiczenia trzeba dysponować dodatkowym czasem na jego realizację. Do uzgodnienia z prowadzącym zajęcia).

VII.1 przyrządy: generator napięcia sinusoidalnego o częstotliwości do 800 kHz, woltomierz cyfrowy, oscyloskop, opornik dekadowy, linia długa z odczepami.

VII.2 literatura: jak w pierwszej części ćwiczenia, rozdział III.

VII.3 Wprowadzenie

Fale stojące mogą powstawać nie tylko w elementach sprężystych i ograniczonych słupach gazów, ale i w elektrycznych liniach przesyłowych: przewodach dwużyłowych i współosiowych (koncentrycznych), a także w liniach łańcuchowych utworzonych z wielu sprzężonych ze sobą układów LC. Schemat takiej linii łańcuchowej jest przedstawiony na rys.5.

Prędkość rozchodzenia się fali w takiej linii opisana jest wzorem

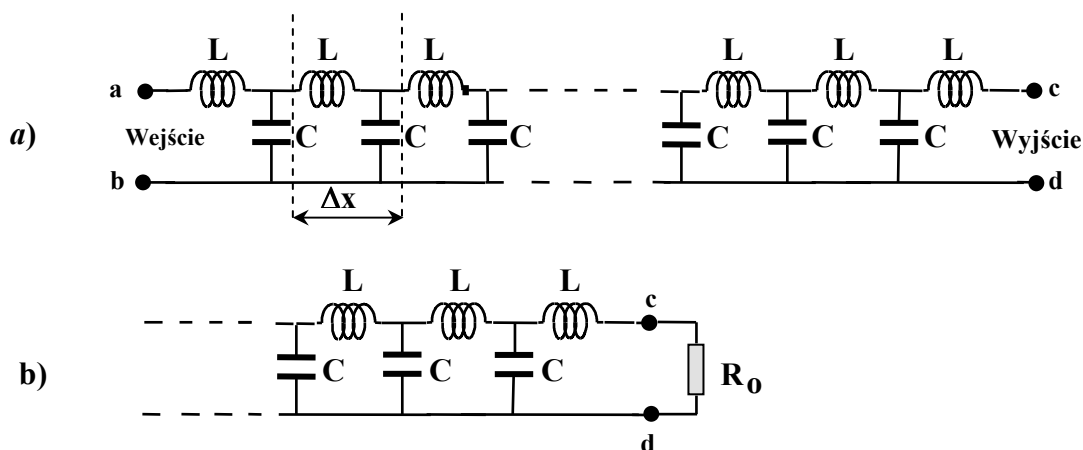
$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad (19)$$

gdzie L_1 i C_1 oznaczają odpowiednio indukcyjność i pojemność przypadającą na 1 m długości linii (wymiar: H/m i F/m). Wielkości L_1 , C_1 oraz L , C pozostają ze sobą w relacji: $L = L_1 \Delta x$, $C = C_1 \Delta x$.

Fale o częstościach kołowych mniejszych od częstości granicznej ω_{gr}

$$\omega_{gr} = \frac{2}{\sqrt{LC}} \quad (20)$$

przechodzą przez linię złożoną z idealnych indukcyjności i pojemności bez strat energii czyli bez zmiany amplitudy.



Rys.5 Schemat linii łańcuchowej rozwartej na końcu (a) i "zamkniętej" rzeczywistą opornością obciążenia R_0 (b).

Dla fal o częstościach znacznie mniejszych od granicznej stosunek napięcia U do natężenia prądu I fali nie zależy od częstości i wynosi

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} \quad (21)$$

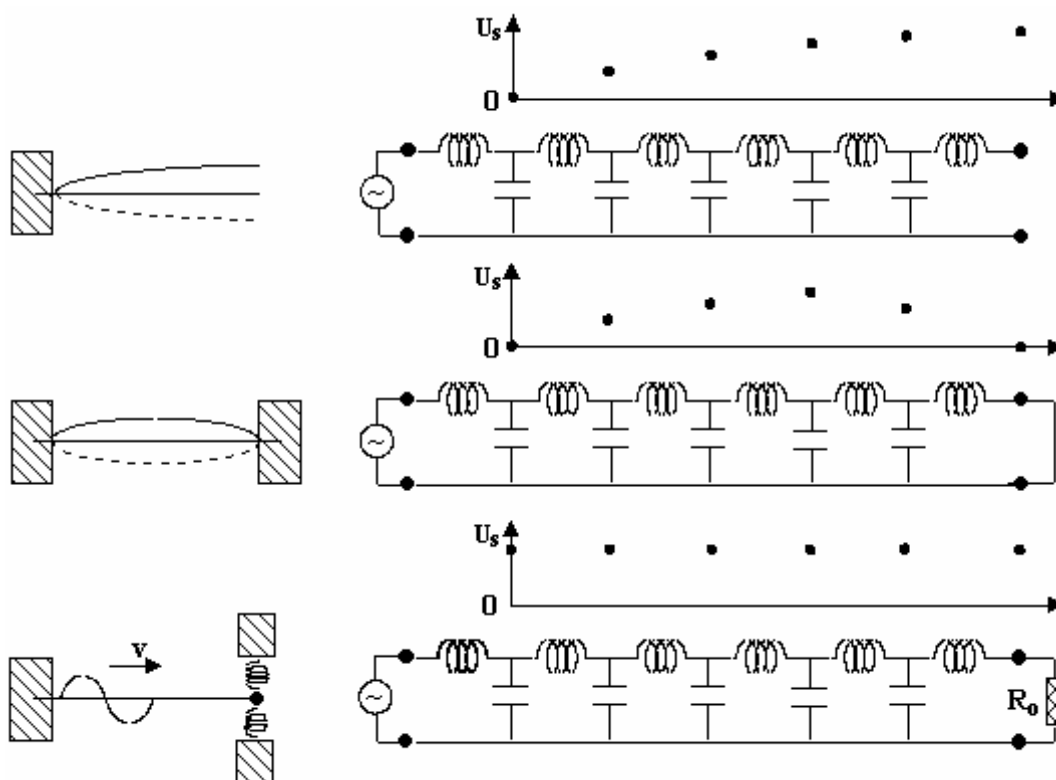
Z_o nazywamy opornością falową albo impedancją charakterystyczną. Dla fal sprężystych w strunie oporność falowa opisana jest wzorem

$$Z_o = \sqrt{\rho_l \cdot F} = \rho_l \cdot v \quad (22)$$

Można udowodnić [1], iż fala odbita powstaje wówczas, gdy fala rozchodząca się w ośrodku o oporności falowej Z_o natrafi na granicę drugiego ośrodka, charakteryzującego się opornością falową Z_{o2} różną od Z_{o1} . Amplituda fali odbitej A_o równa się iloczynowi amplitudy fali padającej przez tzw. współczynnik odbicia p :

$$p = \frac{Z_{o2} - Z_{o1}}{Z_{o2} + Z_{o1}} \quad (23)$$

Fala odbita ma fazę zgodną z falą padającą, jeśli $p > 0$ i przeciwną, gdy $p < 0$. Jeżeli do wejścia linii przesyłowej dołączymy źródło fal, a do wyjścia opornik o oporności równej impedancji charakterystycznej, to zgodnie ze wzorem (23) współczynnik odbicia dla wyjścia linii przyjmie wartość równą zero i nie zaobserwujemy powstania fali odbitej.



Rys.6 Podstawowe postacie fal stojących w strunie i linii łańcuchowej oraz postać drgań w strunie zakończonej idealnym amortyzatorem oraz w linii "zamkniętej" opornością falową. Na wykresach przedstawiono zależność napięcia skutecznego (lub amplitudy) od odległości od wejścia linii.

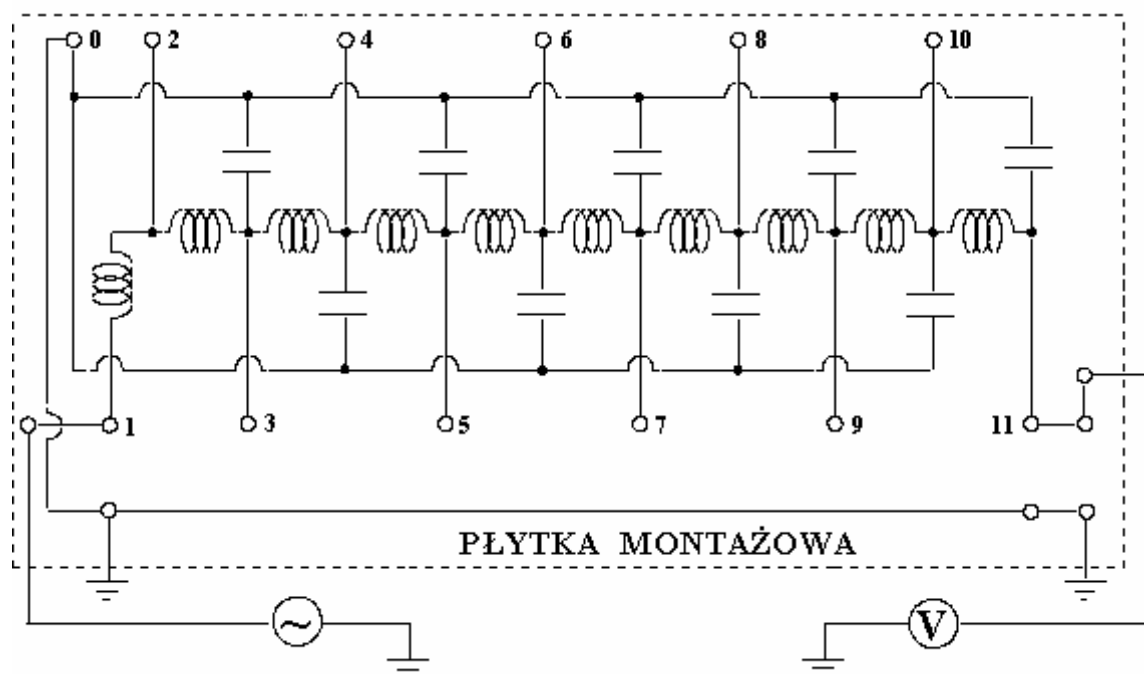
"Zamykając" linię b. małą opornością, czyli np. zwykłym przewodem laboratoryjnym stwarzamy warunek konieczny do wytworzenia w niej fali stojącej o węzle napięcia na końcu linii, podczas gdy warunkiem koniecznym do wytworzenia fali stojącej o strzałce napięcia na końcu

linii jest jej "rozwarcie" (rys.5). Ponieważ fala stojąca nie przenosi energii w kierunku prostopadłym do drgań, a układy rzeczywiste charakteryzuje rozpraszanie energii, to warunkiem dostatecznym wytwarzania fali stojącej w takim układzie jest ciągle pobudzanie go do drgań z częstotliwością spełniającą odpowiedni dla danego układu związek dyspersyjny.

VII.4 Pomiary i opracowanie

Wejście linii przesyłowej o oporności falowej około 1200-1400 Ω łączymy z wyjściem napięcia sinusoidalnie zmiennego generatora funkcyjnego o impedancji wyjściowej 50 Ω lub z wyjściem generatora sygnałowego. Schemat linii przedstawiony jest na rys.7, a dokładny jej opis – w instrukcji do ćwiczenia E-34. Do wyjścia linii dołączamy sondę woltomierza lampowego lub oscyloskopu. Oporność wejściowa tych przyrządów wynosi co najmniej 1M Ω , a więc mamy prawo twierdzić, iż mimo "zamknięcia" końca linii opornością wejściową przyrządu pomiarowego pozostaje ona rozwartą.

- Zmieniając częstotliwość napięcia od 50 kHz do ok. 800 kHz szukamy takich częstotliwości, dla których napięcie mierzone na końcu linii osiąga maksimum.
- Dla każdej z tych częstotliwości wyznaczamy rozkład napięcia wzdłuż linii i określamy postać powstałej fali stojącej.
- Sprawdzamy, czy dołączenie do wyjścia linii opornika dekadowego o oporności rzędu 1200 – 1400 Ω powoduje zanik fali stojącej.
- Wykreślić zależność częstotliwości kołowej ω od wartości stosunku długości fali stojącej λ do długości badanej linii przesyłowej.



Rys.7 Układ do badania fal stojących w linii przesyłowej.

VIII. Uzupelnienie

1. Zgodnie z twierdzeniem Fouriera dowolna funkcja okresowa zmiennej rzeczywistej t o okresie T może być przedstawiona w postaci skończonego lub nieskończonego szeregu sinusów i cosinusów o okresach $T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T, \dots$. W szczególności fala prostokątna o amplitudzie U_0 i okresie T przyjmuje postać:

$$f(t) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left(\frac{2\pi}{2k+1} \cdot \frac{t}{T}\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Zagadnienie to jest szerzej omówione w opisie ćwiczenia E-32.

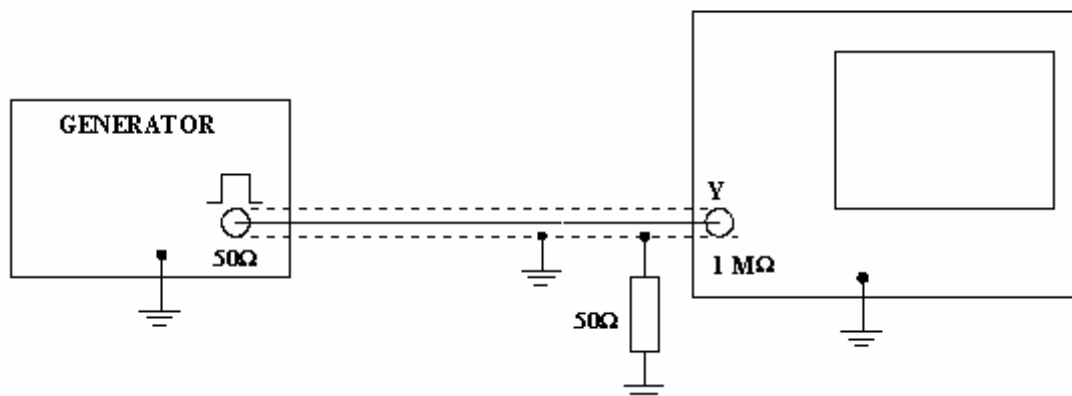
2. Schemat przedstawiony na rys.5 jest także elektrycznym schematem zastępczym zarówno dowolnej linii przesyłowej utworzonej przez dwa równoległe do siebie przewody jak i dowolnego przewodu współosiowego (koncentrycznego). Prędkość rozchodzenia się fali w takim przewodzie określona jest wzorem

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

natomiast oporność falową opisuje zależność

$$Z_o = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$$

gdzie L_1 i C_1 oznaczają odpowiednio indukcyjność i pojemność odcinka przewodu o długości 1m. Do przekazywania sygnałów między profesjonalnymi urządzeniami elektronicznymi stosuje się powszechnie przewody współosiowe o oporności falowej 50Ω i prędkości rozchodzenia się fali rzędu $2 \div 2.5 \cdot 10^8$ m/s. Typowa wartość oporności falowej płaskiego przewodu antenowego telewizora czarno-białego wynosi ok. 300Ω , natomiast koncentryczny przewód antenowy posiada impedancję charakterystyczną 75Ω . W celu zapewnienia poprawnego odbioru programu TV oporność falowa toru sygnałowego od anteny począwszy a na układach wejściowych odbiornika skończywszy, powinna być jednakowa w celu uniknięcia odbić i powodowanych przez nie zniekształceń obrazu.



Rys. 8 Sposób na uniknięcie odbić zniekształcających obraz badanej fali