

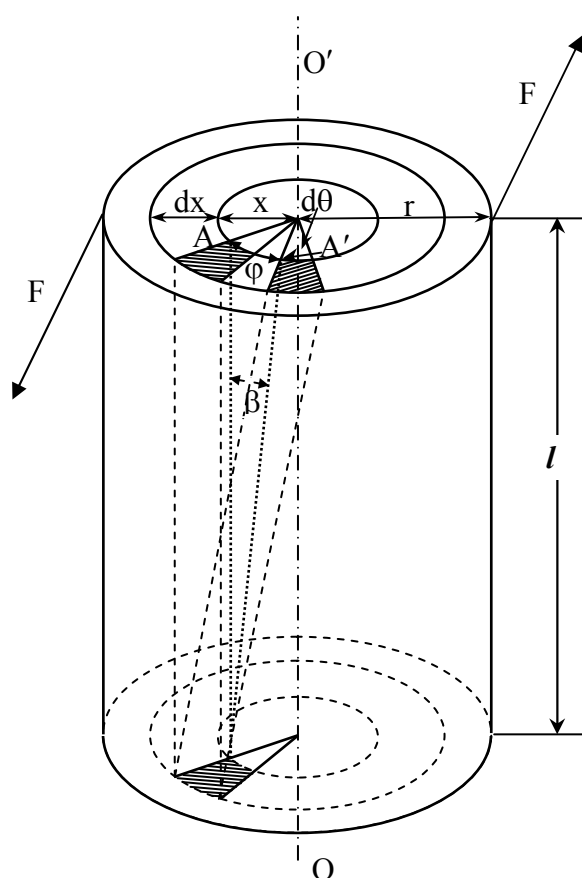
Wyznaczanie współczynnika sztywności drutu metodą dynamiczną.

- I. Cel ćwiczenia:** pomiar współczynnika sztywności dla stali metodą drgań skrętnych.
- II. Przyrządy:** dwa krążki metalowe, statyw, drut stalowy, stoper, suwmiarka, śruba mikrometryczna, waga.
- III. Literatura:** 1. J. L. Kacperski, I Pracownia fizyczna, WUŁ Łódź 1998.

IV. Wstęp

Rozpatrzmy „skręcanie” bryły w kształcie walca, zachodzące pod wpływem sił stycznych do obwodu (rys 1).

Siły takie działają m. in. na śrubokręty, wiertła, wały napędowe, a także cienkie nici w galwanometrach zwierciadlanych i wagach skręceń.



Rys.1 Skręcenie walca pod wpływem sił stycznych do obwodu.

Naszym celem jest znalezienie współczynnika (modułu) sztywności materiału – ilościowej charakterystyki podatności na skręcenie. Jedną z podstaw walca przedstawionego na rys. 1 jest unieruchomiona, druga pod wpływem działających sił uległa obrotowi o kąt φ , a elementarny „prostopadłościan” wybrany do rozważań uległ odkształceniu do formy równoległościanu. Zauważmy,

że długość łuku AA' pozwala związać ze sobą kąt obrotu podstawy φ oraz kąt β , o jaki obróciła się krawędź prostopadłościanu:

$$AA' = x\varphi = l\beta \quad \text{skąd} \quad \beta = \frac{x\varphi}{l} \quad (1)$$

Założmy, że kąt obrotu krawędzi jest proporcjonalny do naprężenia stycznego f :

$$\beta = \frac{1}{G} f \Rightarrow f = \frac{Gx\varphi}{l} \quad (2)$$

Współczynnik G nazywamy modułem sztywności. Na element powierzchni dS działa siła dF :

$$dF = f dS = \frac{G\varphi x^2 dx d\theta}{l} \quad (3)$$

ponieważ $dS = x d\theta dx$.

Element dS odległy jest o x od osi obrotu, więc moment siły dM wyraża się wzorem:

$$dM = x dF = \frac{G\varphi x^3}{l} dx d\theta \quad (4)$$

Całkowity moment siły M znajdziemy, całkując wyrażenie (4) ze względu na x i kąt θ :

$$M = \frac{G\varphi}{l} \int_0^r x^3 dx \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi G r^4 \varphi}{2l} = D\varphi \quad (5)$$

gdzie $D = \frac{\pi G r^4}{2l}$, równe liczbowo momentowi siły powodującemu obrót o kąt jednostkowy, będziemy nazywać momentem kierującym.

V. Metoda pomiaru

Równanie (5) wskazuje na możliwość pomiaru współczynnika sztywności przez doświadczalne znalezienie zależności pomiędzy przyłożonym momentem sił i kątem skręcenia φ . Taka metoda pomiaru nosi nazwę metody statycznej; w ćwiczeniu zastosujemy jednak inną metodę – nazywaną dynamiczną – nie wymagającą znajomości momentu siły M .

Użyjemy krążka zawieszonoego na sprężystym drucie w roli wahadła torsyjnego (rys.2). Przy obrocie o kąt φ pojawia się moment sił sprężystości, skierowany przeciwnie do momentu sił zewnętrznych (wzór (5)) i do kąta φ , mającego zwrot prędkości kątowej nadanej krążkowi przy obrocie:

$$M = -D\varphi \quad (6)$$

Po wykorzystaniu związku $M = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, gdzie I oznacza moment bezwładności krążka, a $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ drugą pochodną kąta obrotu względem czasu (tzn. przyspieszenie kątowe), ostatnie równanie można zapisać w postaci:

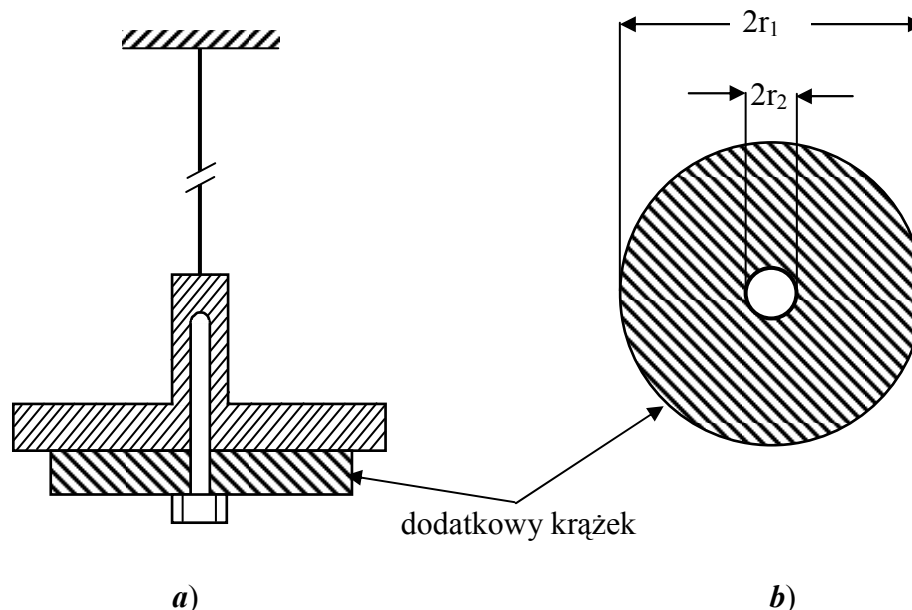
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D}{I}\varphi = 0 \quad (7)$$

w której rozpoznajemy równanie ruchu harmonicznego o częstotliwości kołowej ω :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0 \quad (8)$$

gdzie:

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{D}{I} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \quad (9)$$



Rys.2 a) Układ doświadczalny do wyznaczania modułu sztywności drutu, **b)** dodatkowy krążek mocowany do podstawowego krążka wahadła.

Ponieważ nie znamy ani momentu bezwładności wahadła I , ani momentu kierującego D , niezbędne jest dodatkowe równanie, wiążące obie te wielkości – otrzymamy je, dołączając do wahadła dodatkowy krążek (rys.2), którego moment bezwładności I_1 można łatwo obliczyć. Okres drgań wyniesie wówczas:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I + I_1}{D}} \quad (10)$$

Podnosimy do kwadratu obie strony równań (9) i (10):

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{D} \quad T_1^2 = 4\pi^2 \frac{I + I_1}{D} \quad (11)$$

Odejmujemy te równania (11) stronami:

$$T_1^2 - T^2 = 4\pi^2 \frac{I_1}{D} \quad (12)$$

Z równania (12) można znaleźć moment kierujący:

$$D = \frac{4\pi^2 I_1}{T_1^2 - T^2} \quad (13)$$

oraz, na podstawie zależności (5), w której zdefiniowano moment kierujący, moduł sztywności wyniesie:

$$G = \frac{2Dl}{\pi r^4} = \frac{8\pi I_1}{r^4(T_1^2 - T^2)} \quad (14)$$

Moment bezwładności dodatkowej bryły, którą jest wydrążony walec o promieniach r_1 i r_2 oraz masie m , wyraża się wzorem:

$$I_1 = \frac{m(r_1^2 + r_2^2)}{2} \quad (15)$$

VI. Pomiary

1. Wyznaczyć kilkakrotnie średnicę drutu $2r$ za pomocą śruby mikrometrycznej. Obliczyć wartość średnią promienia drutu \bar{r} .
2. Wyznaczyć kilkakrotnie długość drutu l za pomocą miarki milimetrowej. Obliczyć wartość średnią \bar{l} .
3. Zmierzyć kilkakrotnie średnicę zewnętrzną $2r_1$ pierścienia dodatkowego za pomocą suwmiarki. Obliczyć wartość średnią promienia \bar{r}_1 .
4. Zmierzyć kilkakrotnie średnicę wewnętrzną $2r_2$ pierścienia dodatkowego za pomocą suwmiarki. Obliczyć wartość średnią promienia \bar{r}_2 .
5. Wyznaczyć masę m krążka dodatkowego.
6. Zmierzyć kilkakrotnie czas 20 wahań wahadła nieobciążonego dodatkowym krążkiem i na tej podstawie obliczyć wartość średnią dla jednego okresu \bar{T} .
7. Zmierzyć kilkakrotnie czas 20 wahań wahadła obciążonego dodatkowym krążkiem i na tej podstawie obliczyć wartość średnią dla jednego okresu \bar{T}_1 .

Wyniki pomiarów można zebrać w tabelach 1 i 2.

Uwaga : Drgania są mało tłumione i można wyznaczyć ich okres przy użyciu stopera. Zaznaczamy na stole laboratoryjnym położenie znacznika na krążku (podłużna kreska wzdłuż promienia) i skręcamy krążek o dość duży kąt. Liczymy przejścia znacznika przez położenie równowagi. Przy pierwszym przejściu liczymy „zero”.

Tabela 1

Lp	$2r$ [mm]	\bar{r} [mm]	l [mm]	\bar{l} [mm]	$2r_1$ [mm]	\bar{r}_1 [mm]	$2r_2$ [mm]	\bar{r}_2 [mm]
1								
2								
⋮								

Tabela 2

lp.	drżania wahadła podstawowego		drżania wahadła z dodatkowym krążkiem		masa krążka dodatkowego
	t_{20} [s]	\bar{T} [s]	t'_{20} [s]	\bar{T}_1 [s]	m [g]
1					
2					
⋮					

VII. Opracowanie wyników

1. Obliczyć moment bezwładności I_1 krążka dodatkowego wg wzoru (15).
2. Obliczyć współczynnik sztywności G wg wzoru (14).
3. Niepewność ΔG współczynnika sztywności obliczyć metodą różniczeki zupełnej:

$$\Delta G = \pm G \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I_1}{I_1}\right)^2 + 16\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + 4(T_1^2 + T^2)\left(\frac{\Delta T}{T_1^2 - T^2}\right)^2}$$

gdzie Δl , Δr , ΔT są niepewnościami pomiarowymi odpowiednio długości drutu, jego promienia i okresu drgań.

Niepewność pomiarową momentu bezwładności ΔI_1 można oszacować metodą różniczki zupełnej:

$$\Delta I_1 = \pm I_1 \left(\frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{(r_1 + r_2) \Delta r}{r_1^2 + r_2^2} \right)$$

Założyliśmy tutaj, że $\Delta r_1 = \Delta r_2 = \Delta r$.

4. Porównać otrzymaną wartość doświadczalną z wartością tablicową.