

BADANIE DRGAŃ SWOBODNYCH I DRGAŃ WYMUSZONYCH

- I. Cel ćwiczenia:** wyznaczanie współczynnika sprężystości drgającej sprężyny; wyznaczenie krzywej rezonansowej natężenia prądu w obwodzie RLC; zapoznanie się z zagadnieniami drgań swobodnych, drgań wymuszonych i rezonansu.
- II. Przyrządy:** sprężyna, zestaw ciężarków, sekundomierz, opornik dekadowy, indukcyjność dekadowa, kondensator dekadowy, generator o małej impedancji wyjściowej, woltomierz cyfrowy.
- III. Literatura:** C.Kittel , W.D. Knight, M.A. Ruderman *Mechanika.*, PWN Warszawa 1969

IV. Wprowadzenie.

IV.1 Terminologia.

Drganiami swobodnymi nazywamy drgania układu fizycznego, wychylonego z położenia równowagi trwałej, o ile nie działają nań żadne inne siły, poza tymi, które określają położenie równowagi. Jeżeli ponadto wypadkowa tych sił jest proporcjonalna do wielkości wychylenia, to drgania tych takie nazywamy drganiami harmonicznymi. Wiele różnorodnych układów fizycznych można uważać za oscylatory harmoniczne, jeżeli wychylenia z położenia równowagi są bardzo małe, a siła oporu stawiana drganiom jest również bardzo mała.

Drganiami tłumionymi nazywamy drgania zachodzące w układzie, w którym występują siły oporu, a tym samym i straty energii drgań. Szczególnym przypadkiem drgań tłumionych są drgania harmoniczne o eksponencjalnie malejącej wraz z upływem czasu amplitudzie - noszą one nazwę drgań harmonicznym tłumionych.

Drgania wymuszone to drgania zachodzące pod wpływem zmiennej w czasie siły zewnętrznej.

Zjawisko pobudzania układu fizycznego do drgań, których amplituda i energia mogą być niewspółmiernie wielkie w stosunku do mocy czynnika wymuszającego nosi nazwę rezonansu. Częstość drgań, dla której amplituda i energia osiągają maksimum, nazywamy częstością rezonansową. Częstość rezonansowa jest bliska bądź równa częstości drgań swobodnych czyli częstości własnej układu.

IV.2 Drgania swobodne.

Najprostszym przypadkiem mechanicznych drgań swobodnych są drgania masy m , zawieszona na sprężynie i wprawionej w ruch w warunkach, w których siły oporu ośrodka są znikomo małe. Jeżeli maksymalne wychylenie z położenia równowagi $x_{\max} = x_0$ mieści się w granicach odkształcenia sprężystego, to siła wymuszająca ruch w kierunku położenia równowagi jest proporcjonalna do wielkości wychylenia

$$F = -k \cdot x \quad (1)$$

gdzie stałą k nazywamy współczynnikiem sprężystości. Na mocy II zasady dynamiki równanie ruchu masy m ma wówczas postać

$$\frac{d^2x}{dt} + \omega_o^2 \cdot x = 0 \quad (2)$$

w którym wielkość

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m} \quad (3)$$

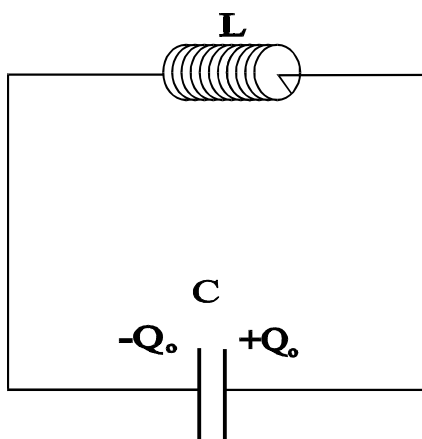
jest stałą niezależną od wielkości wychylenia. Rozwiązaniem szczególnym równania (1) jest funkcja

$$x(t) = x_o \cdot \sin(\omega_o t + \varphi) \quad (4)$$

Z postaci tej funkcji wynika, iż masa m wykonuje ruch drgający o stałych, niezależnych od amplitudy x_o wartościach częstości kątowej (kołowej)

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (5)$$

częstości $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$ i okresu $T_o = \frac{1}{f_o}$.



Rys. 1

Wychyleniem z położenia równowagi inicjującym drgania w obwodzie LC (rys.1) jest wprowadzenie ładunku Q_o na okładki kondensatora o pojemności C , co powoduje powstanie różnicy potencjałów $U_{oC} = Q_o / C$. Pod wpływem napięcia U_C w obwodzie zaczyna płynąć prąd o natężeniu I i na indukcyjności L pojawia się napięcie $U_L = L \cdot dI/dt$. Ponieważ algebraiczna suma spadków potencjału w obwodzie zamkniętym jest równa zero, to

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (6)$$

Po zróżniczkowaniu tego równania względem czasu, uwzględnieniu definicji natężenia prądu $I = dQ/dt$ i wprowadzeniu nowej stałej

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC} \quad (7)$$

otrzymujemy równanie o identycznej postaci matematycznej, jak równanie (2):

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega_o^2 \cdot Q = 0. \quad (8)$$

Porównując odpowiednie równania stwierdzamy, iż odpowiednikiem współrzędnej położenia x masy m jest ładunek Q zgromadzony na okładkach kondensatora, stałej sprężystości k odpowiada odwrotność pojemności kondensatora $1/C$, a masie (bezwładności) m - współczynnik samoindukcji (indukcyjność) L . Natężenie prądu $I = dQ/dt$ jest odpowiednikiem prędkości przemieszczania się masy $v = dx/dt$. Równanie opisujące zmianę natężenia prądu w czasie ma postać

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \omega_o^2 \cdot I(t) = 0 \quad (8a)$$

Częstość drgań swobodnych ładunku i natężenia prądu opisane są wzorem:

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (9)$$

IV.3 Drgania tłumione.

Jeżeli drganiom mechanicznym towarzyszy siła oporu ośrodka proporcjonalna do prędkości

$$F_t = -c \cdot v = -c \cdot \frac{dx}{dt}, \quad (10)$$

to równanie drgań przybiera postać

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 \cdot x = 0, \quad (11)$$

w którym $\delta = c/m$ jest współczynnikiem tłumienia (oporu), a ω_o - kątową (kołową) częstością drgań swobodnych. Oporowi mechanicznemu odpowiada w obwodzie elektrycznym opór elektryczny (oporność rzeczywista) R . Równanie drgań swobodnych np. natężenia prądu ma postać

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2\delta \frac{dI}{dt} + \omega_o^2 \cdot I = 0 \quad (12)$$

gdzie

$$\delta = \frac{R}{2L}. \quad (12a)$$

Dla $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ rozwiązaniem szczególnym równania (12) jest funkcja

$$I(t) = I_o(t) \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) = I_o e^{-\delta t} \cos(\omega_1 \cdot t) \quad (13)$$

Funkcja ta opisuje drgania harmoniczne tłumione o malejącej w miarę upływu czasu amplitudzie $I_o \exp(-\delta \cdot t)$ i częstości kątowej

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2} \quad (13a)$$

tym mniejszej od częstości drgań swobodnych, im większą wartość posiada współczynnik tłumienia.

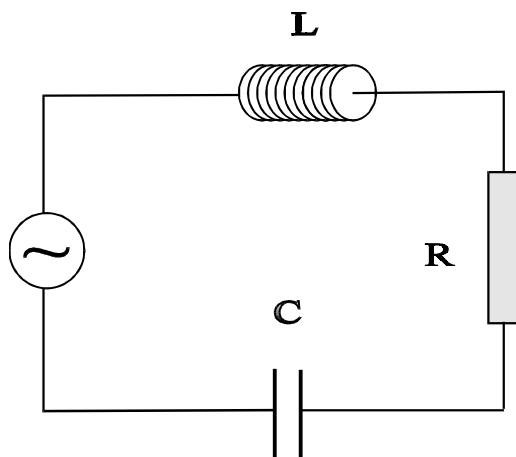
IV.4 Współczynnik dobroci układu.

Energia drgań harmoniczych jest proporcjonalna do kwadratu ich amplitudy. Skoro zaś amplituda harmoniczych drgań tłumionych jest proporcjonalna do czynnika $\exp(-2\delta t)$, to energia

zmniejsza się e - krotnie po czasie $t_e = 1/(2\delta)$. Współczynnikiem dobroci Q_d albo dobrocią układu drgającego nazywamy wartość takiego kąta $\omega_0 t_e$, gdzie ω_0 jest częstością kątową drgań swobodnych, który odpowiada e - krotnemu zmniejszeniu się energii drgań:

$$Q_d = \omega_0 \cdot t_e = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (14)$$

IV.5 Drgania wymuszone i rezonans.



Rys. 2

Jeżeli w obwód RLC (rys.2) włączymy źródło zmiennej w czasie siły elektromotorycznej (SEM)

$$E = E_o \sin(\omega \cdot t), \quad E_o = const. \quad (15)$$

to suma chwilowych wartości spadków potencjału w obwodzie jest w każdej chwili równa chwilowej wartości SEM

$$L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = E_o \sin(\omega t) \quad (16)$$

skąd możemy (por. z (8a) i (12)) otrzymać równanie drgań wymuszonych natężenia prądu

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\delta \frac{dI}{dt} + \omega_o^2 \cdot I = \frac{\omega E_o}{L} \cos(\omega \cdot t) \quad (17)$$

którego rozwiązaniem jest funkcja

$$I(t) = I_o(\omega) \cos(\omega t + \varphi) \quad (18)$$

złożona z dwu czynników. Pierwszy z nich, niezależny od czasu, opisuje zależność amplitudy od częstości kątowej zmian SEM

$$I_o(\omega) = \frac{\omega \cdot E_o}{L \sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} = \frac{\omega \cdot A}{\sqrt{(B - \omega^2)^2 + Z\omega^2}} \quad (19)$$

gdzie $A = E_o / L$ (19a)

$B = \omega_o^2$ (19b)

$Z = (R/L)^2$ (19c)

Jak stąd wynika amplituda natężenia prądu jest trójparametrową (A, B, Z) funkcją jednej zmiennej ω , osiągającą maksimum $I_{or} = E_o / R$ (stan rezonansu !) dla częstości kątowej równej czę-

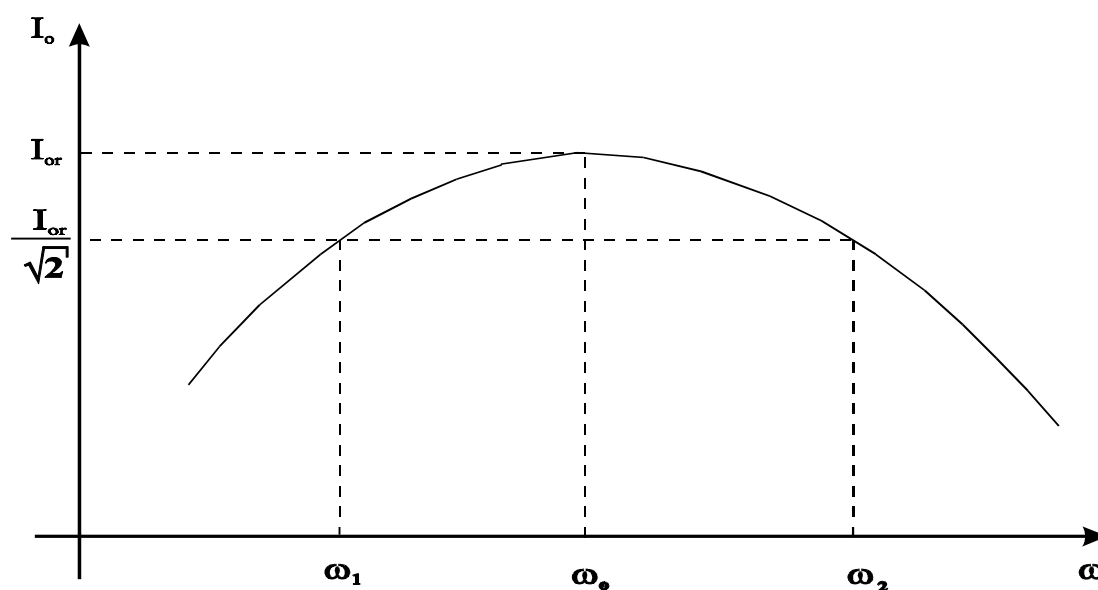
stości kątowej drgań swobodnych. Można wykazać, iż amplituda zmian ładunku na kondensatorze, a tym samym i wartość napięcia osiąga wartość maksymalną dla częstości kątowej $\omega_{oq} = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2/2}$,

mniejszej od częstości drgań swobodnych. Amplituda napięcia na indukcyjności L staje się z kolei maksymalną, gdy częstość kątowa ma wartość $\omega_{oL} = \omega_o \sqrt{\omega_o^2 / (\omega_o^2 - 2\delta^2)} > \omega_o$

IV.6 Szerokość krzywej rezonansowej, a wartość współczynnika dobroci.

Zmniejszeniu amplitudy drgań od wartości maksymalnej w stanie rezonansu $I_o(\omega_o) = I_{or} = E_o / R$ do wartości $I_{or} / \sqrt{2}$ odpowiada spadek energii drgań do połowy wartości maksymalnej. Można udowodnić, iż częstości kątowe ω_1, ω_2 takie, iż (rys. 3)

$$I_o(\omega_1) = I_o(\omega_2) = \frac{I_{or}}{\sqrt{2}} \quad (20)$$



Rys. 3 Krzywa rezonansowa natężenia prądu.

spełniają w przybliżeniu związek

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_o} = \frac{2\delta}{\omega_o} = \frac{1}{Q_d} \quad (20a)$$

Wzór ten daje „dobrą” wartość współczynnika dobroci Q_d , o ile częstości ω_1 i ω_2 niewiele się różnią od ω_o .

Dla obwodu o dużej wartości współczynnika Q_d amplitudy spadku potencjału na indukcyjności U_{oL} i na pojemności U_{oC} spełniają następujące wzory przybliżone:

$$U_{oL} \approx Q_d \cdot E_o \quad \text{ i } \quad U_{oC} \approx Q_d \cdot E_o,$$

gdzie E_o jest amplitudą siły elektromotorycznej.

V. Pomiary.

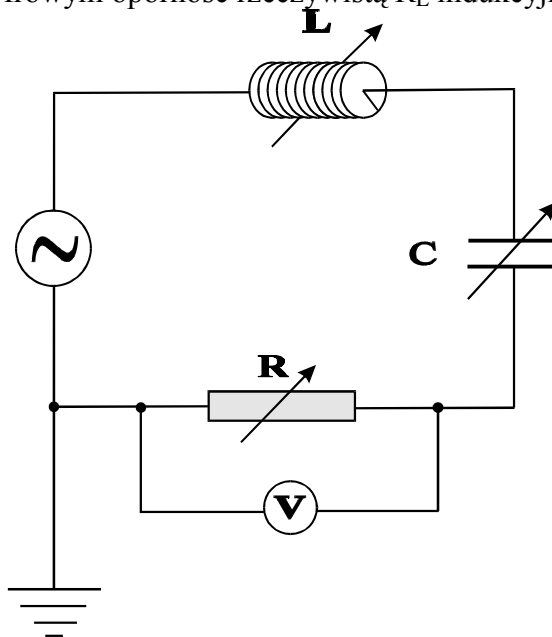
V.1 Drgania quasi-swobodne.

Wyznaczyć zależność okresu drgań ciężarka zawieszonyego na sprężynie od jego masy.

V.2 Drgania wymuszone.

1. Połączyć przyrządy wg. schematu przedstawionego na rys.4.

- Nastawić opornik dekadowy na wartość $R_v = 100\Omega$, indukcyjność dekadową na $L = 1\text{H}$, kondensator dekadowy na $C = 40 \div 60 \text{ nF}$.
- Wyznaczyć zależność napięcia na oporniku dekadowym od częstości w takim przedziale częstości, aby możliwe było odtworzenie krzywej rezonansowej i wyznaczenie współczynnika dobroci Q_d z szerokości krzywej rezonansowej.
- Rozłączyć obwód nie wyłączając generatora ani nie zmieniając jego napięcia wyjściowego. Zmierzyć napięcie na wyjściu generatora w celu oszacowania jego siły elektromotorycznej E_{sk} (woltomierz cyfrowy wyświetla wartość skuteczną mierzonego napięcia!).
- Zmierzyć omomierzem cyfrowym oporność rzeczywistą R_L indukcyjności dekadowej.



Rys. 4

VI. Opracowanie wyników pomiarów.

- Wyniki pomiarów zależności okresu T drgań ciężarka od jego masy m przedstawić na wykresie w postaci zależności kwadratu okresu T^2 od masy m . Ocenic, czy zależność doświadczalna jest zgodna z przewidywaniami teoretycznymi.
- Wyznaczyć współczynnik(stałą) sprężystości k metodą najmniejszych kwadratów, a prostą dopasowaną do punktów doświadczalnych wykreślić na rysunku wspomnianym w punkcie VI.1.
- Na podstawie wybranych wartości L i C obliczyć oczekiwane wartości kątovej częstości rezonansowej $\omega_{or} = 1/\sqrt{LC}$ i częstości rezonansowej $f_{or} = \omega_{or} / 2\pi$. Oblicz oczekiwaną wartość całkowitej oporności rzeczywistej R obwodu równą sumie oporności opornika dekadowego, indukcyjności dekadowej i generatora. Oszacować oczekiwaną wartość współczynnika dobroci $Q = 1/R \cdot \sqrt{L/C}$ oraz oczekiwané wartości parametrów krzywej rezonansowej $A = E_{sk} / L$, $B = \omega_{or}^2$ i $Z = (R/L)^2$. Oszacować błędy względne parametrów A , B , Z przyjmując, iż dokładność oceny wartości L i C jest rzędu 1%, R i E_{sk} - rzędu 5%.
- Dopasować teoretyczną krzywą rezonansową natężenia prądu do danych doświadczalnych za pomocą programu REZONANS.EXE, napisanego na komputer osobisty IBM.

Danymi wejściowymi tego programu są oceny wartości parametrów A , B , Z oraz podwojonej wartości błędów względnych tych wartości. Ponadto do pamięci komputera należy wprowadzić wyniki pomiarów wartości skutecznych napięcia na oporniku dekadowym, wartość częstości i wartość oporności opornika dekadowego. Początkowa liczba iteracji (kroków dopasowania) powinna być rzędu 50.

5. Wykreślić na jednym rysunku zależności:
 - wartości skutecznej natężenia prądu I_d [mA] od częstości f [Hz], otrzymaną doświadczalnie;
 - wartości skutecznej natężenia prądu I_t [mA] od częstości f [Hz], oczekiwaną na podstawie oszacowań parametrów A , B , Z ;
 - wartości skutecznej natężenia prądu od częstości, uzyskaną w wyniku dopasowania krzywej rezonansowej do danych doświadczalnych.
6. Z szerokości doświadczalnej krzywej rezonansowej obliczyć wartość współczynnika dobroci Q_d , a uzyskaną wartość porównać z wartością obliczoną bezpośrednio ze wzoru $Q_d = 1/R \cdot \sqrt{L/C}$.
7. Oszacować wartość częstości rezonansowej f_{or} z przebiegu doświadczalnej krzywej rezonansowej i porównać ją z wartościami, obliczonymi ze wzorów: $f_{or} = 1/2\pi\sqrt{L/C}$ i $f_{or} = \sqrt{B}/2\pi$, gdzie B jest parametrem uzyskanym w wyniku minimalizacji chi-kwadrat.

VII. Program REZONANS.

Program poszukuje takich wartości A_{min} , B_{min} , Z_{min} , aby wartość sumy chi-kwadrat była jak najmniejsza

$$\text{chi-kwadrat} = \sum_{i=1}^n \frac{[I_{ti}(A_{min}, B_{min}, Z_{min}, \omega_i) - I_{di}]^2}{I_{ti}(A_{min}, B_{min}, Z_{min}, \omega_i)}$$

W powyższym wzorze I_{di} jest wynikiem pomiaru natężenia prądu dla częstości kątowej ω_i , a I_{ti} jest wartością obliczoną ze wzoru krzywej rezonansowej dla aktualnych wartości parametrów A , B , Z . Metoda ta nosi nazwę metody minimalizacji chi-kwadrat

Na początku programu za A_{min} , B_{min} , Z_{min} przyjmowane są wartości oszacowane ze wzorów $A = E_{sk}/L$, $B = \omega_0^2$, $Z = (R/L)^2$. Następnie obliczane są wartości elementów t_{ijk} macierzy T o wymiarze $3 \times 3 \times 3$:

$$t_{ijk} = \sum_{l=1}^n \frac{[I_{tl}(A_{min} + i \times dA, B_{min} + j \times dB, Z_{min} + k \times dZ, \omega_l) - I_{dl}]^2}{I_{tl}}$$

gdzie dA , dB , dZ są krokami zmian wartości parametrów A , B , Z , wynoszącymi na początku przebiegu programu;

$dA = 2 \times (\Delta A/A) \times A$, $dB = 2 \times (\Delta B/B) \times B$, $dZ = 2 \times (\Delta Z/Z) \times Z$, przy czym $\Delta A/A$, $\Delta B/B$, $\Delta Z/Z$ są błędami względnymi A , B , Z .

Spośród elementów t_{ijk} wybierany jest element o najmniejszej wartości t_{imin} , j_{min} , k_{min} .

Jeśli $imin = jmin = kmin = 0$, to kroki zmian wartości parametrów krzywej rezonansowej I_t zostają zmniejszone o połowę ($dA := dA/2$, $dB := dB/2$, $dZ := dZ/2$) i obliczenia nowych elementów macierzy T są wykonywane dla tych samych wartości A_{min} , B_{min} , Z_{min} . Jeśli warunek ten nie jest spełniony, to parametry A , B , Z ulegają zmianie:

$A_{min} := A_{min} + imin \times dA$, $B_{min} := B_{min} + jmin \times dB$, $Z_{min} := Z_{min} + kmin \times dZ$ i ponownie poszukiwany jest element macierzy T o minimalnej wartości.

Po wykonaniu określonej przez użytkownika programu liczbie takich cykli (iteracji) na ekran monitora wyprowadzane są wyniki dopasowania. Jeśli jakość dopasowania nie jest zadowalająca, to obliczenia mogą być kontynuowane dla aktualnych lub zmienionych wartości A , B , Z , dA , dB , dZ .