RUCH HARMONICZNY

I. **Cel ćwiczenia:** wyznaczenie wartości przyspieszenia ziemskiego, pomiar współczynnika sprężystości sprężyny k, zaznajomienie się z podstawowymi wielkościami w ruchu harmonicznym.

II. Przyrządy: stoper, wahadło matematyczne, sprężyna, ciężarki, miarka milimetrowa.

III. Literatura:

1. F. C. Crawford, Fale PWN 1973
2. A. K. Wróblewski i J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki, PWN 1976.
3. A. Piekara, Mechanika Ogólna, PWN.

IV. WSTĘP

Ruch drgający okresowy mamy wówczas, gdy wartości wielkości fizycznych zmieniające się podczas drgań, powtarzają się w równych odstępach czasu. Najprostszym rodzajem drgań są drgania harmoniczne (inaczej nazywane ruchem drgającym prostym).

Ruchem harmonicznym nazywamy ruch drgający cząstki, w którym siła powodująca go tzw. siła kierująca jest proporcjonalna do wychylenia x z położenia równowagi i posiada zwrot przeciwny względem x. Równanie opisujące ten ruch ma postać:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \ , \qquad (1)$$

gdzie ω jest częstością kołową. Rozwiązaniem powyższego równania różniczkowego II-go stopnia jest wyrażenie

$$x = x_o \cdot \sin(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

lub

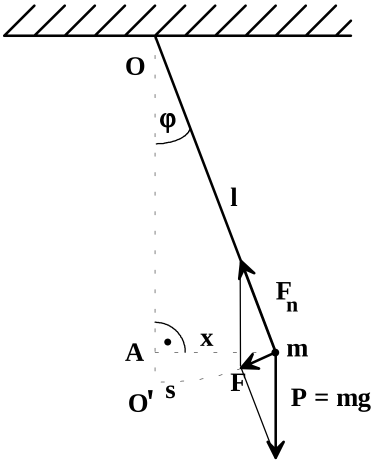
$$x = x_o \cdot \cos(\omega t + \varphi') \qquad (2')$$

gdzie x_o jest amplitudą drgań, $(\omega t + \varphi)$ lub $(\omega t + \varphi')$ - fazą drgań, φ lub $\varphi' = \varphi + \pi/2$ - fazą początkową, gdy $t = 0$.

Wahadło matematyczne drgające w jednej płaszczyźnie i drgający ciężarek zawieszony na sprężynie są przykładami mechanicznych układów drgających ruchem harmonicznym o jednym stopniu swobody. Stan (konfigurację) tych układów w dowolnej chwili t określa tylko jedna wielkość a mianowicie wychylenie x określone wzorem (2) lub (2').

IV.1 Wahadło matematyczne

Wahadłem matematycznym nazywamy " nieważką i nierozciągliwą nić " (lub pręt) o długości *l* z jednym końcem unieruchomionym zaś drugim obciążonym " punktowym " ciężarkiem o masie m (rys.1). Jak wynika z definicji jest to model matematyczny. W praktyce za takie wahadło możemy uważać ciężarek zawieszony na lekkiej mocnej nici, której długość l jest wielokrotnie większa niż wymiary ciężarka. Na masę wahadła działają dwie siły: siła grawitacji P = mg i siła napięcia nici F_n. Siła wypadkowa F = - mgsinφ jest siłą kierującą. Wychylenie x przedstawia sobą odległość masy m od nici w położeniu równowagi. Moment obrotowy siły kierującej F względem punktu zawieszenia wahadła O jest równy



Rys. 1

$$M = F \cdot l = -mgl \sin\varphi \qquad (3)$$

Równanie ruchu Newtona dla ruchu obrotowego ma postać

$$M = I \cdot \varepsilon \qquad (4)$$

gdzie $I = ml^2$ jest momentem bezwładności masy m.

Porównując stronami równania (3) i (4)

$$I \cdot \varepsilon = -mgl \sin\varphi$$

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin\varphi \qquad (5)$$

Ponieważ dla małych kątów sinφ ≈ φ, to równanie (5) możemy zapisać

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \qquad (6)$$

Podstawiając φ = s/l (długość łuku $s = l \cdot \varphi$; dla małych kątów φ mamy s » x) otrzymujemy równanie ruchu harmonicznego wahadła matematycznego

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0 \ . \qquad (6')$$

Porównując to równanie z (1) mamy

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \ , \qquad (7)$$

a ponieważ $\omega = \frac{2\pi}{T}$, to okres drgań wahadła matematycznego wyrazi się wzorem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (8)$$

Okres drgań wahadła matematycznego nie zależy od masy wahadła. Zastosowane przybliżenie sinφ ≈ φ daje błąd tylko 0,1% dla φ = 7^o i 1% gdy φ = 23^o . W przypadku, gdy kąt największego wychylenia wahadła φ > 20^o na okres drgań należy stosować wzór

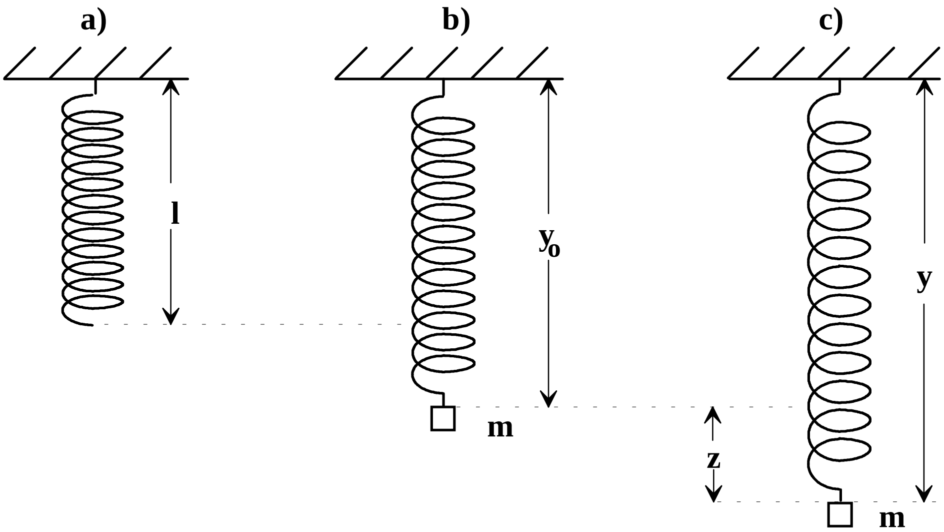
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\sin^2\frac{\varphi}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2}\sin^4\frac{\varphi}{2} + \ldots\right) \qquad (9)$$

IV.2 Wahadło sprężynowe

Sprężynę o długości l zamocowaną jednym końcem (rys.2a) obciążamy ciężarkiem o masie m. W położeniu równowagi statycznej długość sprężyny wynosi y (rys.2b). Wskutek rozciągnięcia sprężyny o y_o - l powstałe siły sprężyste równoważą ciężar masy m tzn.

$$mg = k(y_o - l) \qquad (10)$$

gdzie k jest współczynnikiem sprężystości. Ciężarek wyprowadzony z położenia równowagi (rys.2c) pozostawiony sam sobie rozpocznie ruch wzdłuż osi pionowej.



Rys.2

Ruch ten opisuje równanie

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k(y - l) \qquad (11)$$

Oznaczając wychylenie z położenia równowagi przez $z = y - y_o$, wykorzystując zależność (10) i mając na uwadze, że y = const. równanie (11) przyjmie postać

$$m\frac{d^2(z + y_o)}{dt^2} = mg - k(z + y_o - l) \ ,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - k\left(z + \frac{mg}{k}\right) = -kz,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}z = 0 \ . \qquad (12)$$

Postać równania (12) jest taka sama jak (1). Ciężarek zawieszony na sprężynie wyprowadzony z położenia równowagi wykonuje drgania harmoniczne. W tym przypadku

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \ ,$$

a zatem okres drgań

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \ . \qquad (13)$$

V. METODA POMIARU

Wzory (8) i (13) na okres drgań wahadła matematycznego i sprężynowego mogą posłużyć do wyznaczania przyspieszenia ziemskiego g i współczynnika sprężystości k .

I. Po zlogarytmowaniu (8) otrzymujemy :

$$\lg T = \lg \frac{2\pi}{\sqrt{g}} + \frac{1}{2}\lg l \qquad (14a)$$

a po zlogarytmowaniu zależności (13)

$$\lg T = \lg \frac{2\pi}{\sqrt{g}} + \frac{1}{2}\lg m \qquad (14b)$$

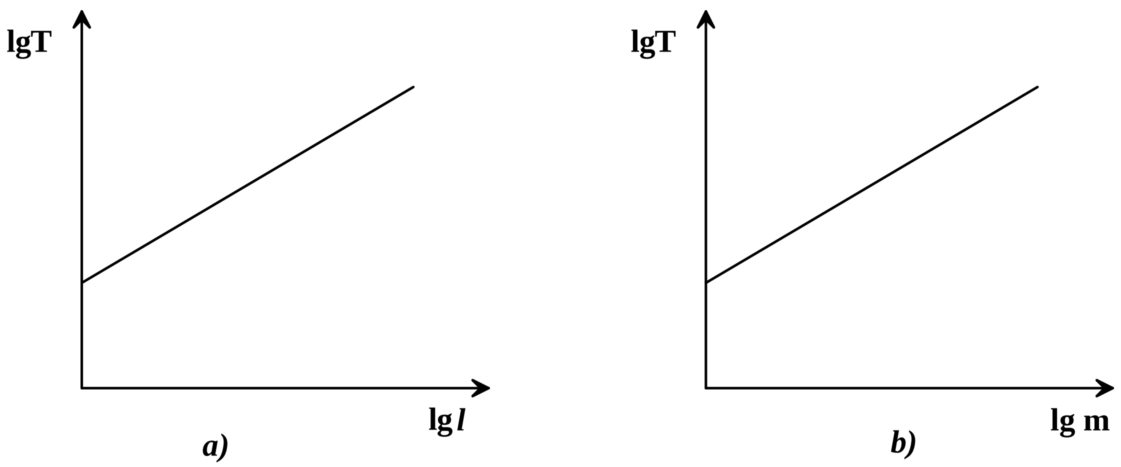
W układach współrzędnych $y = \lg T,\ x = \lg l$ (dla zależności (14a)), bądź $y = \lg T,\ x = \lg m$ (dla zależności (14b)) wykresami zależności (14) są proste (rys.3a i 3b)

$$y = a_1 x + b_1 \quad \text{i} \quad y = a_2 x + b_2$$

gdzie $a_1 = \frac{1}{2},\ b_1 = \lg\frac{2\pi}{\sqrt{g}}$ dla wahadła matematycznego (15a)

oraz

$a_2 = \frac{1}{2},\ b_2 = \lg\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ dla wahadła sprężynowego (15b)



Rys.3

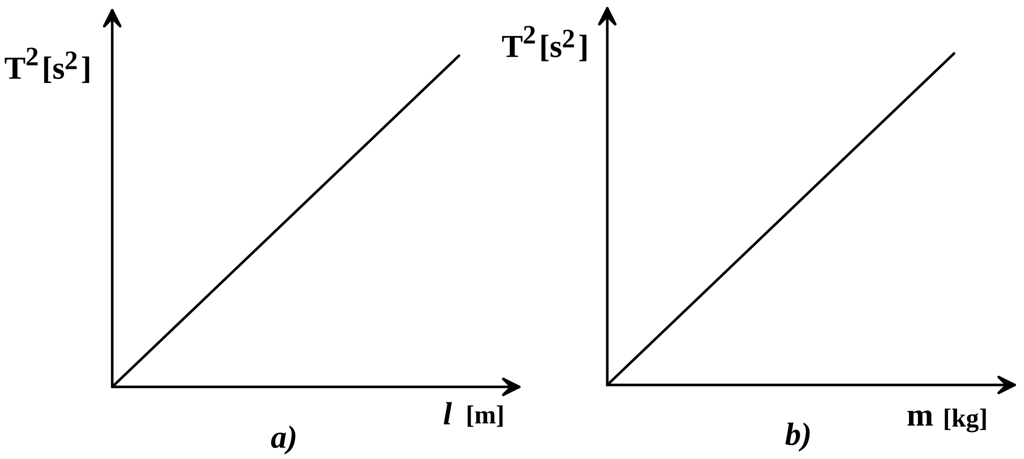
Wyznaczając z wykresów b_1 i b_2 na podstawie wzorów (15) możemy obliczyć przyspieszenie ziemskie g i współczynnik sprężystości k.

II. Rozpatrując zależność (8) w układzie współrzędnych $y = T^2,\ x = l$, a zależność (13) w układzie współrzędnych $y = T^2,\ x = m$ na wykresach otrzymamy proste (rys.4a i 4b):

$$y = c_1 x \quad \text{i} \quad y = c_2 x$$

gdzie $c_1 = \frac{4\pi^2}{g}$ dla wahadła matematycznego (16a)

$c_2 = \frac{4\pi^2}{k}$ dla wahadła sprężynowego (16b)



Rys.4

Znając c_1 i c_2 ze wzorów (16) możemy wyznaczyć g i k.

VI. ZASTOSOWANIA

Okres drgań wahadła matematycznego (prostego), praktycznie nie zależy od amplitudy drgań (dla małych wychyleń). Stosuje się je do mierzenia czasu. Gdy siły hamujące zmniejszają amplitudę, okres T pozostaje niezmieniony. Dla wyrównania strat energia jest dostarczana automatycznie za pomocą odpowiedniego mechanizmu. Wahadło zegarowe z takim mechanizmem wynalazł Chrystian Huygens (1629 - 1695). Wyznaczanie przyspieszenia g ważne jest w badaniach geologicznych. Obecność złóż rud metali i nafty wpływa na wielkość g.

VII. POMIARY

1. Wahadło matematyczne

W celu otrzymania dokładniejszego wykresu, pomiary należy wykonać dla kilku długości l (co najmniej 5-ciu w przedziale 0,2¸ 1,2m) każdorazowo mierząc czas 40 pełnych drgań. Należy pamiętać, że wy chylenia ciężarka z położenia równowagi nie mogą być duże ($\varphi < 5^o$) Długość wahadła mierzymy od punktu zawieszenia do środka ciężarka. Wyniki pomiarów zapisujemy w tabeli.

Możemy w prosty sposób sprawdzić, że wzór (8) jest słuszny dla małych wychyleń wahadła. Dla jednej długości wahadła (np. l = 1m) należy wykonać pomiar T wychylając ciężarek o duży kąt ($\varphi > 30^o$). Wynik ten możemy porównać z obliczonym T według wzorów (8) i (9) zakładając, że znamy przyspieszenie ziemskie g.

2. Wahadło sprężynowe

Pomiary okresów drgań wahadła sprężynowego przeprowadzamy dla kilku mas znanych i jednej nieznanej (m_x) mierząc czas trwania 20 pełnych drgań.

VIII. OPRACOWANIE WYNIKÓW

1♦ Na podstawie wyników pomiarów sporządzić wykresy zależności okresu drgań wahadła matematycznego od długości T = T(l).

2♦ Dla wahadła sprężynowego sporządzić wykres zależności okresu drgań od masy T = T(m).

3♦ Te same zależności podać w układzie współrzędnych (lgT, lg l) dla wahadła matematycznego i (lg T, lg m) dla wahadła sprężynowego lub w układach współrzędnych odpowiednio (T^2, l) i (T^2, m). Z tych wykresów wyznaczyć współczynniki b_1 i b_2 (lub c_1 i c_2) i obliczyć z podanych wzorów (15*a*, 15*b*) lub (16*a*, 16*b*) przyspieszenie ziemskie g i współczynnik sprężystości k.

4♦ Z wykresu T = T(m) znając okres T_x wyznaczyć nieznaną masę m_x .

5♦ Wyznaczyć błędy pomiaru wielkości g i k obliczając Δb lub Δc. Wyznaczoną wartość g porównać z wynikiem tablicowym.