Tablica Galtona. Mechaniczny model rozkładu normalnego

I. Cel ćwiczenia: zapoznanie się z charakterystyką i prawidłowością zdarzeń statystycznych na podstawie doświadczenia.

II. Przyrządy: tablica Galtona, stalowe kulki, poziomica.

III. Literatura:

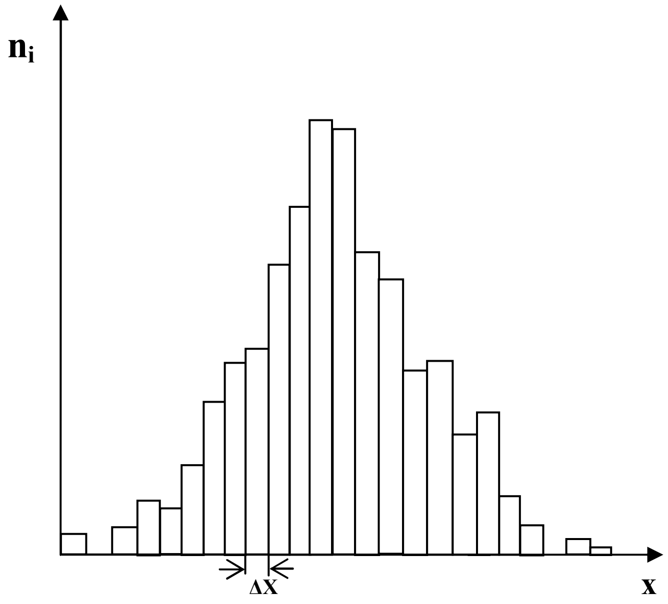
[1] J. L. Kacperski, „I Pracownia fizyczna";
[2] J. L. Kacperski, K. Niedźwiedziuk; „I Pracownia fizyczna",
[3] J. L. Kacperski „Opracowanie danych pomiarowych",
[4] K. Małuszyńska, M. Przytuła „Laboratorium fizyki jądrowej",
[5] M. Kaczmarczyk „ Ćwiczenie statystyczne. Stabilizacja względnych częstości i rozkład względnych częstości zdarzeń" (instrukcja pracowniana),
[6] H. Hofmokl, A. Zawadzki, „ Laboratorium fizyczne";
[7] H. Szydłowski „Pracownia fizyczna",
[8] M.Fisz „Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna".

IV. Rozkład normalny

Zbiór wszystkich możliwych do otrzymania wyników pomiarów pewnej wielkości mierzonej nazywamy populacją generalną. Populacja generalna składa się z nieskończenie wielu wyników. W praktyce wykonuje się pewną skończoną liczbę pomiarów zwaną **próbą.** Zakłada się, że jest to próba losowa dobrze reprezentująca całą populacje. Przy pomiarach wielkości fizycznych otrzymane wyniki pomiarów zależą od wielu czynników, niekiedy niezależnych od prowadzącego pomiary. Działanie ich powoduje pojawienie się błędów pomiarowych. Nie jesteśmy w stanie przewidzieć wyników pomiarów wykonanych w danych warunkach. Wynik jest wielkością zmieniającą się przypadkowo w pewnych granicach, niekiedy nieskończonych. Tę wielkość nazywamy **zmienną losową,** charakteryzowaną przez pewien rozkład, który będzie szerszy (w przypadku gdy wystąpi wiele czynników zakłócających) lub węższy (gdy czynników będzie niewiele). W przypadku kiedy wynikiem pomiaru mogą być tylko niektóre wartości z dostępnego przedziału mówimy, że jest to zmienna losowa **skokowa (dyskretna**). Kiedy wynikiem pomiaru może być dowolna wartość, mówimy o zmiennej **losowej ciągłej.**

Wykonajmy serię pomiarów pewnej wielkości x. Niech otrzymane wyniki pomiaru x_1, x_2, x_3,…x_n przyjmują wartości z określonego przedziału oraz niech liczba pomiarów n spełnia warunek n >> 20 (jest to ilość wystarczająca do uzyskania w praktyce przybliżenia rozkładu normalnego). Wyniki te można przedstawić graficznie na tzw. **histogramie (**rys.1).

Dane doświadczalne są dzielone na przedziały (klasy) – lewostronnie domknięte przedziały liczbowe o równej szerokości Δx. Szerokość przedziału powinna wynosić w granicach $\left(\frac{1}{4} \div \frac{1}{6}\right)\sigma$ ze względu na przejrzystość histogramu, gdzie σ jest odchyleniem standardowym (patrz dalej). Ilość przedziałów musi być liczbą całkowitą. Na osi rzędnych odkładamy ilość pomiarów n_i lub liczebność względną n_i/n odpowiadających i-temu przedziałowi, a na osi odciętych j przedziałów o szerokości Δx. Zachodzi oczywiście $\sum_{i=1}^{j} n_i = n$. Zatem histogram jest zbiorem prostokątów o podstawie równej szerokości przedziału klasowego i wysokości równej liczebności n_i i-tej klasy.



Rys.1 Histogram doświadczalny pewnej wielkości x

Otrzymane wartości najczęściej są zgrupowane w obszarze znajdującym się w środkowej części histogramu. Im dalej od tego obszaru tym mniej obserwuje się przypadków, stąd częstość występowania takiej wartości maleje. Częstość występowania mierzymy stosunkiem liczby pomiarów n_i w danym przedziale do całkowitej liczby pomiarów n czyli

$$P_i = \frac{n_i}{n} \tag{1}$$

W przypadku, gdy liczba pomiarów n wzrasta, a szerokość Δx maleje, rozkład wyników doświadczalnych w przypadku granicznym daje krzywą ciągłą, która zwana jest **krzywą Gaussa** lub **krzywą gęstości rozkładu normalnego** opisaną równaniem

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{2}$$

Krzywą tą charakteryzują dwa parametry: **wartość oczekiwana** μ i **odchylenie standardowe** σ. Wartość oczekiwana określa położenie maksimum krzywej, a odchylenie standardowe jej szerokość, czyli odchylenie wyników od wartości μ. Wielkość p(x) jest **gęstością prawdopodobieństwa** wyników pomiaru**.** Parametry obliczone z próby zwane są estymatorami. Estymatory dają możliwość wnioskowania o wartości parametrów populacji generalnej. Wartość średnia (średnia arytmetyczna) $\bar{x}$ z próby jest estymatorem wartości oczekiwanej μ, czyli średniej w populacji. Odchylenie standardowe z próby jest estymatorem odchylenia standardowego w populacji. Dla wartości średniej mamy więc

$$\bar{x} = \mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{3}$$

Dla próby podzielonej na przedziały klasowe wartość średnia wyraża się wzorem

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{j} n_i \bar{x}_i}{n} \tag{4}$$

gdzie $\bar{x}_i = (x_i + x_{i+1})/2$ jest środkiem i-tego przedziału, j – liczbą przedziałów klasowych oraz

$$\sum_{i=1}^{j} n_i = n \tag{5}$$

Dla próby nie klasowej (nie dzielonej na przedziały klasowe) estymator odchylenia standardowego σ jest odchyleniem standardowym z próby i jest równy

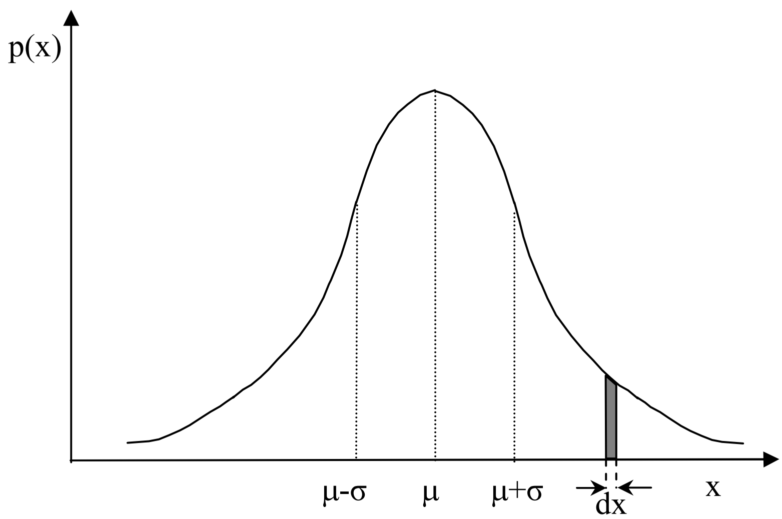
$$\sigma \cong s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{6}$$

gdzie s jest średnim błędem kwadratowym pojedynczego pomiaru.

Dla próby podzielonej na przedziały klasowe, gdzie n przedstawione jest wzorem (5) odchylenie standardowe wyrażone jest wzorem

$$\sigma \cong s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{j} n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{7}$$

Dla próby dużej lub bardzo dużej jedynkę w mianowniku we wzorach (6) i (7) można pominąć.
Dla odciętych równych μ – σ i μ + σ krzywa Gaussa posiada punkty przegięcia (rys.2).



Rys. 2 Funkcja gęstości prawdopodobieństwa

Iloczyn p(x) dx stanowi prawdopodobieństwo znalezienia wartości x w przedziale (x – dx/2, x + dx/2), innymi słowy jest to prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną losową wartości z przedziału (x – dx/2, x + dx/2) (zaciemnione pole na rys.2).
Funkcja p(x) jest symetryczna względem μ tzn. względem wartości rzeczywistej wielkości mierzonej. Wartość średnia $\bar{x}$ jest bliska wartości rzeczywistej μ. W praktyce dla próby zawierającej bardzo dużą liczbę pomiarów przyjmujemy, że $\mu \cong \bar{x}$ oraz $\sigma \cong s$
Prawdopodobieństwo tego, że wynik przyjmie jedną z wartości od minus nieskończoności do plus nieskończoności wynosi

$$P(-\infty<x<\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1 \tag{8}$$

co odpowiada pewności. Graficznie jest to pole powierzchni pod krzywą równe jedności.

Kiedy fluktuacje statystyczne są dużo większe od błędów wynikających z działania aparatury, odchylenie standardowe σ zależy od wartości średniej (przypadek rozkładu Poissona) i zachodzi relacja $\sigma^2 = \bar{x}$.

W przypadku podstawienia $u = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ krzywa z równania (2) ulega przesunięciu w lewo o odcinek μ, a odcięte są wyrażone w jednostkach σ. W wyniku w/w zmian otrzymujemy tzw. krzywą znormalizowaną o parametrach μ = 0, σ = 1. Równanie (2) przyjmuje postać

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \tag{9}$$

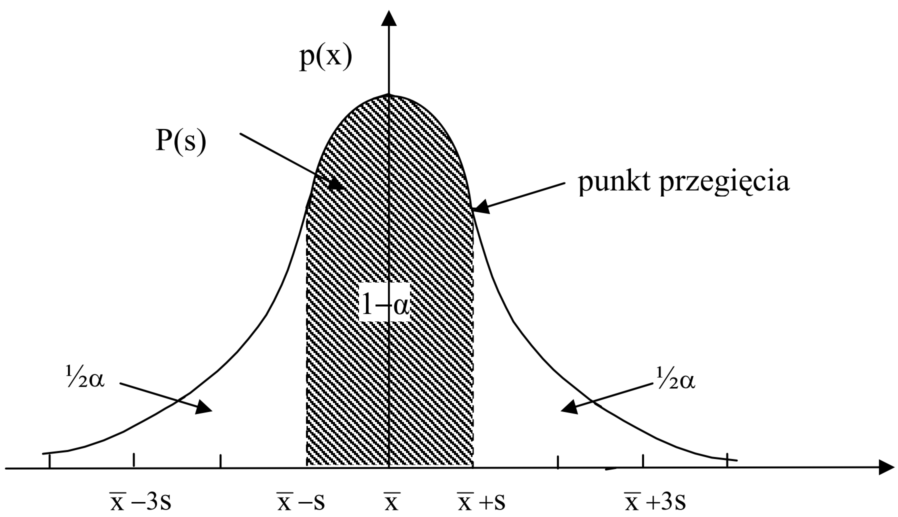
Wartości funkcji p(u) w zależności od u są zamieszczone w tabeli, która z reguły znajduje się w Uzupełnieniach podręczników (patrz pozycje literatury [1] – [3], [6]).

Ponieważ prawdopodobieństwo tego, że wynik pomiaru leży w przedziale $[x_i, x_{i+1})$ wynosi $P_i = p(\bar{x}_i)\cdot\Delta x$, a $p(\bar{x}_i) = \dfrac{p(u_i)}{\sigma}$, to wówczas wykorzystując równanie (1) po niewielkim przekształceniu dla przedziału o szerokości Δx otrzymamy teoretyczną liczbę pomiarów n_i w danym przedziale

$$n_i^o = \frac{n\cdot\Delta x\cdot p(u_i)}{\sigma} \tag{10}$$

Dla przedziału o szerokości jednostkowej Δx = 1 (tak jest w przypadku deski Galtona) mamy

$$n_i^o = \frac{np(u_i)}{\sigma} \tag{11}$$



Rys.3. Interpretacja graficzna poziomu ufności w rozkładzie normalnym

Prawdopodobieństwo P(ms), że wynik pomiaru mieści się w przedziale ($\bar{x} - ms$, $\bar{x} + ms$) gdzie m = 1, 2, 3,… równe powierzchni pod krzywą ograniczonej wartościami odciętej $\bar{x} - ms$, $\bar{x} + ms$ oznacza się przez $1 - \alpha$ i nazywa się współczynnikiem ufności. Przyjmuje się, że całkowite pole ograniczone krzywą i osią x jest równe 1. Prawdopodobieństwo znalezienia się poza tym przedziałem jest równe α i odpowiada pozostałej niezakreślonej powierzchni pod krzywą. Parametr α nosi nazwę poziomu istotności. Na rys.3 pokazane jest prawdopodobieństwo P(s) dla przedziału ($\bar{x} - s$, $\bar{x} + s$).

V. Test zgodności χ^2 (chi-kwadrat)

Rozkład doświadczalny określonej wielkości fizycznej można porównać z rozkładem teoretycznym. Jeśli nie jesteśmy pewni, że zbiór danych doświadczalnych podlega założonemu rozkładowi, wykonujemy tzw. test zgodności χ^2 (test Pearsona).

Niech wartości otrzymane w wyniku pomiaru wynoszą $x_1, x_2 \ldots x_n$. Podzielmy cały przedział wartości otrzymanych wyników na j przedziałów (klas) każdy o szerokości Δx $[x_i, x_{i+1})$, gdzie i = 1, 2,….j. Niech P_i oznacza prawdopodobieństwo, że zmienna losowa x o rozkładzie p(x) przyjmuje wartości z przedziału $[x_i, x_{i+1})$, n_i niech oznacza doświadczalną liczbę pomiarów odpowiadającą przedziałowi $[x_i, x_{i+1})$, a $\sum_{i=1}^{j} n_i = n$. Spodziewaną teoretyczną liczbę obserwacji w i-tym przedziale podaje wzór (10) a dla tablicy Galtona wzór (11). Wówczas jako kryterium zgodności rozkładu $n_1, n_2 \ldots n_j$ z rozkładem normalnym przyjmujemy wielkość:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{j} \frac{(n_i - n_i^o)^2}{n_i^o} \tag{12}$$

którą nazywamy zmienną chi- kwadrat o k stopniach swobody. Ilość stopni swobody k obliczamy z relacji

$$k = j - r - 1 \tag{13}$$

gdzie j jest to liczba przedziałów, a r liczba parametrów rozkładu teoretycznego – dla rozkładu normalnego r = 2

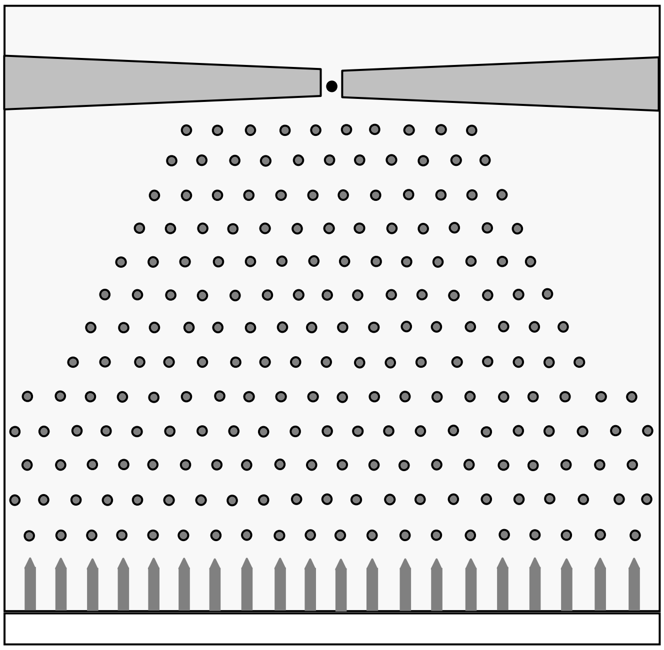
Optymalna liczba przedziałów jest bliska pierwiastkowi z liczby przypadków: j = $\sqrt{n}$. W przypadku stosowania testu χ^2 powinny być spełnione następujące warunki: liczba przedziałów $j > 6 \div 8$, liczba stopni swobody $k \geq 4$, ilość pomiarów w każdym przedziale $n_i > 5$ (w przeciwnym wypadku należy połączyć w jeden przedział kilka skrajnych przedziałów). Testowanie rozkładu będzie polegało na obliczeniu wartości χ^2 zgodnie ze wzorem (12) i porównaniu jej z wartościami rozkładu $\chi^2_{k,\alpha}$ dla liczby stopni swobody k i założonego poziomu istotności α (zwykle $\alpha = 0{,}05$) w odpowiednich tablicach.

Hipotezę o zgodności rozkładu eksperymentalnego i teoretycznego przyjmujemy, gdy spełniona jest nierówność

$$\chi^2 \leq \chi^2_{k,\alpha} \tag{14}$$

gdzie α jest przyjętym poziomem istotności. Więcej na temat rozkładu i testu χ^2 w ***Uzupełnieniu*** str. 9 oraz w [1] i [3].

VI. Aparatura pomiarowa



Rys.4 Tablica Galtona

Tablica Galtona stanowi tablicę z cienkimi prętami metalowymi. Nad prętami znajduje się szczelina, przez którą wrzucane są kulki stalowe. Na dole tablicy znajdują się identyczne przegródki z wysuwanymi denkami. W przypadku, gdy średnice kulek są tylko nieznaczne większe od odległości między sąsiednimi prętami, zderzenie kulki z prętem ma charakter czołowy. W związku z tym szanse odchylenia w lewo lub w prawo są jednakowe. Kulka wrzucona do szczeliny odbija się wielokrotnie od prętów, aż w końcu wpada do jakiejś przegródki. Istnieje szereg możliwych dróg dojścia do każdej przegrody.

VII. Pomiary

Przejście kulki przez rzędy prętów odpowiada pojedynczemu pomiarowi. Każde zderzenie z prętem symbolizuje błąd elementarny. Położenie przegrody, do której wpada kulka to wynik pomiaru. Wartość „dokładną" wielkości mierzonej symbolizuje położenie szczeliny, do której wrzuca się kulki. Prawdopodobieństwo trafienia kulki do przegrody centralnej, położonej pod szczeliną jest największe, co powoduje, że w centralnej przegrodzie będzie najwięcej kulek. W ćwiczeniu należy wrzucić do szczeliny kilkaset kulek (każdą kulkę wrzucamy pojedynczo).
Jeśli liczba poziomych rzędów prętów dąży do nieskończoności, a średnice kulek, odległości między prętami i wymiary przegród dążą do zera, to funkcja, która wiąże ilość kulek w przegrodzie z jej odległością od środka tablicy dąży do rozkładu normalnego.

VIII. Opracowanie wyników

1. Zapisz wyniki pomiarów w kolumnie 1 i 2 tab.1 ($\overline{x}_i$ jest numerem przegrody).
2. Oblicz wartość średnią $\overline{x}$ ze wzoru (4) i odchylenie standardowe $\sigma \cong s$ ze wzoru (7) wykorzystując obliczenia z tab.1.

3. Narysuj histogram doświadczalny korzystając z kolumny 1 i 2. tab.1. Wartość zmiennej $\bar{x}_i$ oznacza środek przedziału (podstawy słupka histogramu). Np. dla $\bar{x}_1 = 1$ lewy i prawy kraniec przedziału są równe odpowiednio 0,5 i 1,5.

Tabela 1

$\bar{x}_i$	n_i	$n_i\bar{x}_i$	$(\bar{x}_i - \bar{x})$	$n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$u_i = \frac{(\bar{x}_i - \bar{x})}{s}$	$p(u_i)$	$n_i^o = \frac{np(u_i)}{s}$
1	**2**	**3**	**4**	**6**	**7**	**8**	**9**
1							
2							
3							
⋮							
j – 1							
j							

4. Oblicz u_i oraz teoretyczną wartość n_i^o ze wzoru (11). Odczytaj z właściwej tablicy (patrz poz. lit. [1] – [3], [6]) wartości gęstości prawdopodobieństwa $p(u_i)$.
5. Na histogramie doświadczalnym umieść punkty teoretyczne n_i^o z kolumny 9 tabeli 1 i połącz je linią ciągłą.
6. Sprawdź „normalność" histogramu przy pomocy testu χ^2.
   Przy obliczeniach wartości χ^2 należy sprawdzić, czy zostały spełnione wszystkie kryteria dla przeprowadzenia w/w testu, czyli czy liczebności przedziałów są większe od $n_{min} = 5$. Jeśli ten warunek nie jest spełniony, należy połączyć odpowiednią liczbę sąsiadujących przedziałów (jak w tabeli 2).

Tabela 2

$\bar{x}_i$	n_i	$n_i^o = \frac{np(u_i)}{s}$	$(n_i - n_i^o)$	$\frac{(n_i - n_i^o)^2}{n_i^o}$
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	n_1	n_1^o		
2	n_2	n_2^o		
3	n_3	n_3^o		
⋮	⋮	⋮		
$j-2$	n_{j-2}	n_{j-2}^o		
$j-1$	n_{j-1}	n_{j-1}^o		
j	n_j	n_j^o		

$\chi^2 =$

W przypadku grupowania przedziałów należy pamiętać, że ich liczba ulega zmniejszeniu o liczbę tych zsypanych. Zmniejszy się też odpowiednio liczba tzw. stopni swobody k. Ilość stopni swobody k obliczamy z relacji (patrz wzór (13)):

$$k = j - r - 1$$

gdzie j jest to liczba przedziałów, a r liczba parametrów rozkładu teoretycznego – dla rozkładu normalnego r = 2.
Więcej patrz [2] str.26.

7. Wykorzystując tabelę 2 oblicz wartość χ^2 .
8. Dla poziomu istotności α = 0,05 i znanej liczby stopni swobody k z właściwej tabeli odczytaj $\chi^2_{k,\alpha}$ (poz. lit. [1] – [3], [6]).

   Jeśli zachodzi relacja $\chi^2 \leq \chi^2_{k,\alpha}$ hipotezę o zgodności rozkładu eksperymentalnego i teoretycznego przyjmujemy. Jeśli jest odwrotnie hipotezę odrzucamy .
9. Przeprowadzić dyskusję wykonanego doświadczenia i otrzymanych wyników.

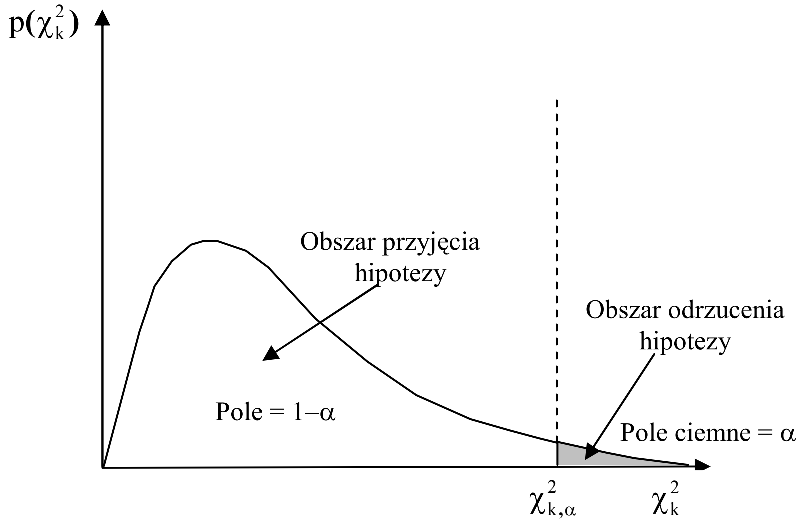
IX. Uzupełnienie

IX.1 Rozkład χ^2 (chi-kwadrat)

Jeśli $u_1, u_2, \ldots, u_j$ są zmiennymi losowymi podlegającymi rozkładowi normalnemu o wartości średniej równej 0 i odchyleniu standardowemu σ = 1 (rozkład N(0,1), to wyrażenie

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^{j} u_i^2 \tag{14}$$

określa nową zmienną losową χ^2 (chi-kwadrat) o k stopniach swobody. Podlega ona rozkładowi, którego gęstość prawdopodobieństwa opisana jest funkcją $p(\chi_k^2)$. Postać analityczna funkcji jest dość złożona i nie zamieszczono jej w instrukcji (można ją znaleźć w [3], [4]). Jedynym parametrem tego rozkładu jest liczba stopni swobody k. Liczba stopni swobody jest równa: k = j – r – 1 (j – liczba składników sumy (14), r – liczba parametrów założonego rozkładu). Przebieg funkcji gęstości prawdopodobieństwa $p(\chi_k^2)$ dla pewnego k przedstawia rysunek 4.



Rys.4 Wykres gęstości prawdopodobieństwa $p(\chi_k^2)$ dla danego k (k > 6).

Prawdopodobieństwo tego, że zmienna χ_k^2 przyjmie wartość większą od pewnej wartości $\chi_{k,\alpha}^2$ wynosi

$$P\left(\chi_k^2 > \chi_{k,\alpha}^2\right) = \int_{\chi_{k,\alpha}}^{\infty} p\left(\chi_k^2\right) d\chi_k^2 = \alpha \tag{15}$$

Parametr α nosi nazwę ***poziomu istotności*** i jest równy ciemnej powierzchni na rysunku 4 (tak jest, jeśli mamy do czynienia z rozkładem unormowanym – całkowita powierzchnia pod krzywą jest równa 1).

Dla k ≤ 2 funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest funkcją monotonicznie malejącą. W miarę wzrostu k początkowa asymetria zanika i dla k > 30 rozkład normalny daje dobre przybliżenie rozkładu χ_k^2.

IX.2 Test zgodności χ^2 (chi-kwadrat)

Bardzo często stosowanym testem zgodności rozkładu doświadczalnego z założonym rozkładem modelowym jest test χ^2 (chi-kwadrat).

Rozpatrzmy przypadek próby o n niezależnych obserwacjach zmiennej losowej X: x_1, x_2, x_3, …. x_n.. Obserwacje te dzielimy na j klas każda o szerokości Δx ($\overline{x}_i - \Delta x/2$, $\overline{x}_i + \Delta x/2$), gdzie $\overline{x}_i$ jest środkiem i–tego przedziału (klasy), i = 1, 2, …, j oraz $\sum_{i=1}^{j} n_i = n$. Do i–tej klasy zaliczamy te wartości, które należą do przedziału ($\overline{x}_i$ – Δx/2, $\overline{x}_i$ + Δx/2). Niech $y_i = n_i$ będzie doświadczalną liczbą pomiarów odpowiadającą i–tej klasie (i = 1, 2,….j są to numery kolejnych klas), a $f(x_i) = n_i^o$ niech będzie liczebnością znalezioną w oparciu o założony rozkład.

Do oceny zgodności rozkładu doświadczalnego z założonym rozkładem modelowym wprowadza się wielkość

$$X^2 = \sum_{i=1}^{j} \frac{\left(y_i - f(x_i)\right)^2}{f(x_i)} = \sum_{i=1}^{j} \frac{\left(n_i - n_i^o\right)^2}{n_i^o} \tag{16}$$

Można wykazać, że wyrażenie (16) przy pewnych założeniach definiuje zmienną losową, która ma rozkład χ^2. Dlatego prawą stronę wyrażenia (16) można oznaczyć symbolem χ_k^2, w którym indeks dolny zawiera informację o liczbie stopni swobody rozkładu czyli

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^{j} \frac{\left(n_i - n_i^o\right)^2}{n_i^o} \tag{16a}$$

Prawdopodobieństwa P, których znajomość jest istotna w wielu zagadnieniach statystycznych są zebrane w formie tablic (np. w [3], [6],). Istnieją dwa rodzaje tablic. Jedne podają dla różnych wartości k prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa przyjmie wartość większą od określonej liczby $\chi_{k,\alpha}^2$. Drugi rodzaj tablic podaje dla różnych wartości parametru k takie liczby rzeczywiste $\chi_{k,\alpha}^2$, że prawdopodobieństwo przybrania przez zmienną losową wartości większej od danej liczby jest równe z góry danej liczbie α.

Przyjętą hipotezę (np., że rozkład doświadczalny jest rozkładem normalnym) sprawdzamy korzystając z własności rozkładu χ^2. Najpierw dla potrzeb testu obliczamy wartość χ^2 dla naszej serii pomiarów (wg wzoru (12) lub (16a) tej instrukcji). Oznaczamy tę wartość przez χ_d^2. Następnie z powodu istnienia dwóch rodzajów tablic stosujemy się do jednej z opisanych niżej procedur.

1. Korzystając z odpowiedniej tablicy [2] znajdujemy prawdopodobieństwo tego, że zmienna χ_k^2 przyjmie wartość większą od χ_d^2 (wartość ta odpowiada oznaczeniu $\chi_{k,\alpha}^2$ na rys. 4) czyli $\alpha = P = P(\chi_k^2 > \chi_d^2)$ dla odpowiedniej liczby stopni swobody k i dla konkretnej wartości χ_d^2. Jeżeli odczytana wartość prawdopodobieństwa P jest zawarta w przedziale $0{,}1 < P < 0{,}9$, to hipotezę przyjmujemy za prawdziwą. Gdy $\alpha < 0{,}01$ lub $\alpha > 0{,}98$ hipoteza jest mało prawdopodobna i należy ją odrzucić. Jeśli $\alpha > 0{,}98$, to istnieje podejrzenie, że jakieś dodatkowe czynniki np. znajomość przewidywanej wielkości, sprowokowała zaokrąglanie wartości pomiarowej, aby dostać maksymalną zgodność z teorią.

2. Korzystając z odpowiedniej tablicy [1], dla określonej liczby stopni swobody k i założonego poziomu istotności α (czyli określonego prawdopodobieństwa P) znajdujemy wartość $\chi_{k,\alpha}^2$. Jeśli zachodzi relacja $\chi_d^2 < \chi_{k,\alpha}^2$, to hipotezę przyjmujemy za prawdziwą. Jeśli jest odwrotnie – hipotezę odrzucamy.

Bardziej szczegółowe informacje na temat rachunku statystycznego można znaleźć w literaturze podanej na początku instrukcji.