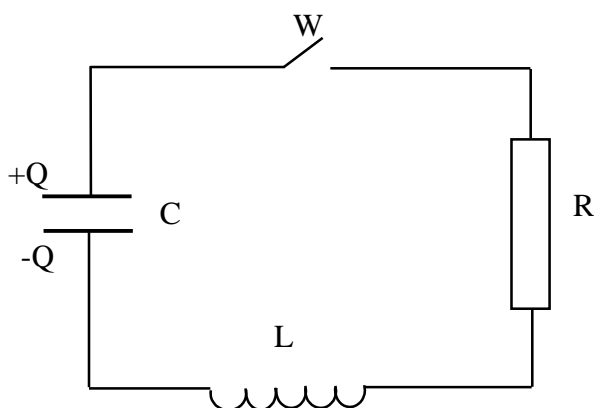


Drgania tłumione.

- I. Cel ćwiczenia:** zapoznanie się z zagadnieniem drgań tłumionych, wyznaczenie parametrów obwodu RLC.
- II. Przyrządy:** oscyloskop dwukanałowy, generator funkcyjny, płytka montażowa obwodu RLC, dodatkowo opornik dekadowy.
- III. Literatura:**
1. Ch. Kittel, W. Knight, M. Ruderman – Mechanika
 2. E.M. Purcell – Elektryczność i magnetyzm
 3. R.P. Feynman – Wykłady z fizyki, t.I cz. 1
 4. Pracownia fizyczna dla zaawansowanych, Skrypt UŁ.

IV. Wprowadzenie.

Rozważmy szeregowy obwód RLC złożony z idealnych elementów: opornika o oporze rzeczywistym R , uzwojenia o indukcyjności L i naładowanego ładunkiem Q kondensatora o pojemności C oraz otwartego początkowo wyłącznika W (rys.1).



Rys.1 Szeregowy obwód RLC.

Po zamknięciu wyłącznika rozpoczyna się proces rozładowania kondensatora i w obwodzie płynie prąd o natężeniu I wytwarzając na oporniku spadek potencjału U_R proporcjonalny do chwilowej wartości I , spadek potencjału na uzwojeniu U_L proporcjonalny do szybkości zmian natężenia prądu w czasie, natomiast napięcie na kondensatorze U_C jest proporcjonalne do chwilowej wartości ładunku Q . Ponieważ w obwodzie brak jest źródła siły elektromotorycznej (SEM) to suma spadków potencjału w obwodzie (zgodnie z II prawem Kirchhoffa) jest równa zero: $U_L + U_R + U_C = 0$

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = 0 \quad (1)$$

Różniczkując stronami równanie (1) względem czasu otrzymujemy wyrażenie

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (2)$$

Po uwzględnieniu, iż natężenie prądu równe jest pochodnej ładunku względem czasu i dokonaniu prostych przekształceń otrzymujemy równanie różniczkowe rzędu drugiego, opisujące zależność natężenia prądu od czasu

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (3)$$

lub wprowadzając wielkość zwaną współczynnikiem tłumienia

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad (4)$$

i wielkość będącą częstością kątową drgań swobodnych (tj. drgań w obwodzie LC)

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (5)$$

równanie w postaci

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\delta \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0 \quad (6)$$

Jeśli współczynnik tłumienia spełnia warunek tzw. słabego tłumienia $\delta < \omega_0$, to rozwiązaniem równania (6) jest funkcja

$$I(t) = I_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t) \quad (7)$$

gdzie ω jest częstością drgań natężenia prądu

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (8)$$

a I_0 nazywamy amplitudą początkową natężenia prądu. Jak wynika ze wzoru (7) drgania natężenia prądu w obwodzie RLC przy słabym tłumieniu mają charakter drgań harmonicznym tłumionych czyli drgań harmonicznym o eksponencjalnie malejącej w czasie amplitudzie $I_0 \exp(-\delta t)$. W szczególności okres tych drgań $T = 1/f$, gdzie

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (9)$$

nie zależy od wartości początkowej ładunku Q_0 (także amplitudy początkowej drgań I_0) i słabo zależy od R dla $\delta \ll \omega_0$ (tj. $\omega = \omega_0$).

Przypadek, gdy $\delta = \omega_0$ nazywamy przypadkiem tłumienia krytycznego – w obwodzie nie powstają drgania harmoniczne, a natężenie prądu maleje eksponencjalnie wraz z czasem $I(t) = I_0 \exp(-\delta t)$.

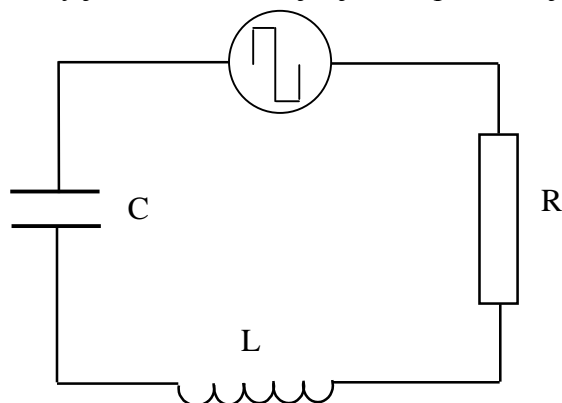
Dla $\delta > \omega_0$ czyli $R^2 > 4L/C$ równanie różniczkowe opisujące drgania w obwodzie nie posiada rozwiązania w dziedzinie funkcji rzeczywistych, co oznacza iż fizycznie w obwodzie nie powstają drgania harmoniczne, a kondensator szybko rozładowuje się.

Współczynniki tłumienia δ przypisać można prostą interpretację fizyczną. Wprowadźmy w tym celu parametr $\tau = 1/\delta$ zwany czasem relaksacji lub charakterystycznym czasem tłumienia. Łatwo wówczas zauważyć, iż w czasie τ amplituda natężenia prądu maleje $e -$ krotnie. A zatem porównanie współczynnika tłumienia δ z częstością drgań swobodnych ω_0 (drgań dla $R = 0$) sprowadza się w istocie rzeczy do porównania czasu τ , w którym amplituda natężenia prądu maleje $e -$ krotnie wskutek wydzielania ciepła w oporniku, a okresem T (ściśle mówiąc okresem podzielonym przez 2π , gdyż $\omega = 2\pi/T$) drgań polegających na bezstratnym procesie przechodzenia energii pola elektrycznego w naładowanym kondensatorze w energię pola magnetycznego w uzwojeniu, przez które przepływa prąd i procesie odwrotnym. Jeśli charakterystyczny czas tłumienia τ jest odpowiednio krótki w porównaniu z okresem

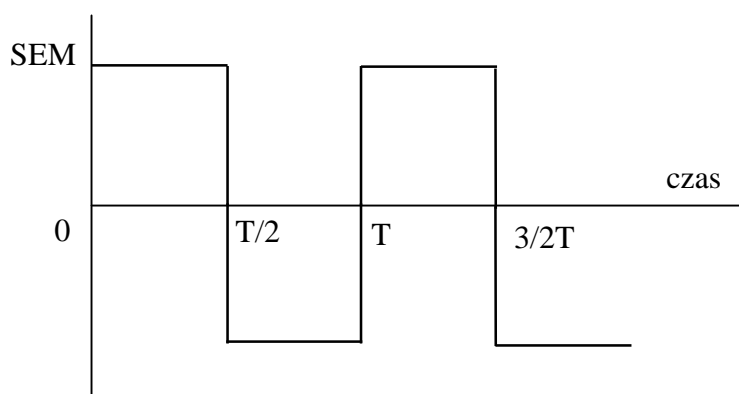
drgań dla $R = 0$, to w obwodzie nie powstają drgania – rozładowanie kondensatora nie ma charakteru oscylacyjnego.

V. Metoda pomiaru.

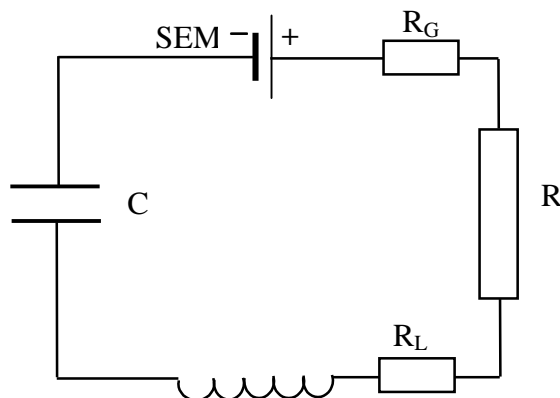
Bezpośrednia obserwacja drgań harmoniczných tłumionych w obwodzie RLC o typowych parametrach jest możliwa pod warunkiem zastosowania oscyloskopu cyfrowego lub odpowiedniego interfejsu pomiarowego sprzężonego z komputerem, gdyż mamy do czynienia z szybko przebiegającym w czasie zjawiskiem nieperiodycznym – natomiast zwykły oscyloskop analogowy przeznaczony jest do obserwacji zjawisk powtarzających się w czasie ze sto-



Rys.2a Szeregowy obwód RLC ze źródłem SEM w postaci fali prostokątnej .



Rys.2b Prostokątna fala napięcia.



Rys.2c Schemat zastępczy szeregowego obwodu RLC.

sunkowo znaczną częstotliwością. Dlatego też najprostszym sposobem obserwacji drgań tłumionych jest wzbudzenie ich prostokątną, symetryczną falą napięcia.

Jeżeli w szeregowy obwód RLC włączymy źródło SEM w postaci generatora prostokątnej fali napięcia (rys.2a i 2b) to schemat zastępczy powstałego w ten sposób układu przyjmie postać ukazaną na rys.2c, o ile rozważać będziemy przedział czasu $[0, T/2]$, gdzie T jest okresem fali prostokątnej. Opór R_G oznacza na tym schemacie rzeczywisty opór wyjściowy (wewnętrzny) generatora, a R_L opór rzeczywisty (dla prądu stałego) uzwojenia o indukcyjności L.

Na podstawie powyższego schematu możemy napisać równania :

$$E = L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + (R + R_G + R_L) I = L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + R_Z I = \text{const} \quad (10)$$

$$\frac{dE}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R_Z \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0 \quad (11)$$

E – wartość stałej w czasie siły elektromotorycznej (SEM).

Postać równania (11) jest identyczna z postacią równania (3). Napięcie na uzwojeniu jest opisane funkcją :

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = U_{oL} \cos(\omega_o L I_o e^{-\delta t} \cos(\omega_o t)) \quad (12)$$

$$\delta = \frac{R_Z}{2L} = \frac{R + R_G + R_L}{2L}, \quad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$U_{oL} = \omega_o L I_o e^{-\delta t}$$

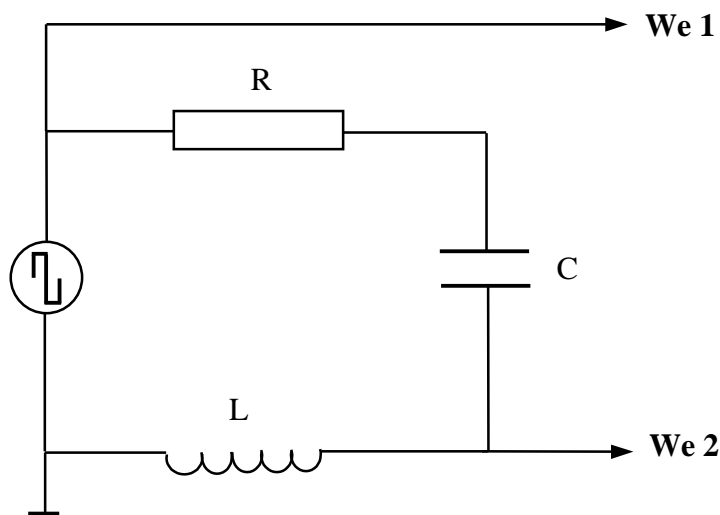
dla przypadku słabego tłumienia $\delta \ll \omega_o$.

Tak więc napięcie na indukcyjności w szeregowym obwodzie RLC zasilanym prostokątną falą napięcia ma w przypadku słabego tłumienia charakter drgań harmonicznym tłumionych o eksponencjalnie malejącej w czasie amplitudzie. A zatem w celu wyznaczenia wartości współczynnika tłumienia i okresu drgań harmonicznym tłumionych można posłużyć się generatorem funkcyjnym (standardowo taki generator posiada możliwość generowania fali prostokątnej) jako źródłem SEM i prostym oscyloskopem analogowym.

VI. Pomiary

1. Przygotować oscyloskop do pomiarów.
2. Połączyć przyrządy według schematu z rysunku 3. Wybrać tryb pracy oscyloskopu z liniową, wyzwalaną podstawą czasu, „siekaną” (chopped) pracą przełącznika kanałów i wyzwalaniem podstawy czasu z kanału I (A) lub też (zalecane) zastosować zewnętrzne wyzwalanie podstawy czasu z pomocniczego wyjścia generatora. **Uwaga ! łącząc obwód RLC możemy wykorzystać oporniki znajdujące się na płycie montażowej lub opornik dekadowy (zalecane).**
3. Celem pomiarów jest wyznaczenie zależności współczynnika tłumienia δ od oporu R opornika włączonego w obwód i zależności okresu drgań T od R, a następnie obliczenie wartości indukcyjności L, pojemności C i oporu wyjściowego (wewnętrznego) generatora. W tym celu należy po pierwsze tak dobrać okres fali prostokątnej, aby był on znacznie większy od okresu drgań wzbudzonych w obwodzie – po wykonaniu tej czynności należy przełączyć oscyloskop na pracę jednokanałową. Aby uzyskać zależność δ od R musimy wyznaczyć zależność amplitudy napięcia U_{oL} na indukcyjności od czasu dla szeregu róż-

nych wartości R pamiętając o konieczności zachowania warunku słabego tłumienia. Ponieważ dokładność pomiaru oscyloskopem istotnie zależy od wysokości obrazu na ekranie należy tak dobrać wartość współczynnika odchylenia kanału II, aby „dodatnia” część „gasnącej” sinusoidy wypełniała jak największą część ekranu, a pomiar amplitudy wykonujemy co jedną wartość okresu drgań T . Amplitudę drgań napięcia mierzymy, zgodnie z jej definicją, jako (w tym przypadku) różnicę potencjałów maksymalnego i zerowego. Położenie linii zerowego potencjału na ekranie oscyloskopu ustalamy za pomocą pokrętki przesuwu pionowego przy wejściu kanału II (B) odłączonym od układu odchylenia pionowego [4]. Ze względu na występowanie zjawiska dryftu czyli powolnego,



Rys.3 Schemat układu pomiarowego.

niekontrolowanego przesuwania się tej linii w pionie czynność tę powtarzamy dość często.

4. Jeżeli ćwiczenie wykonujemy w wariancie z opornikiem dekadowym, to należy dokonać próby oszacowania krytycznej wartości oporu R , to jest takiej wartości, dla której współczynnik tłumienia $\delta = (R_G + R_L + R)/(2L)$ jest równy częstości drgań swobodnych $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$, a drgania harmoniczne tłumione przechodzą w eksponentialny zanik natężenia prądu $I = I_0 \exp(-\delta t)$.

VII. Opracowanie wyników

1. Wykreślić zależność logarytmu naturalnego amplitudy drgań napięcia U_{oL} na indukcyjności od czasu dla poszczególnych wartości oporu opornika R . Przedstawiając zależność U_{oL} od czasu jako $U_{oL}(t) = U_0 \exp(-\delta t)$ otrzymujemy po zlogarytmowaniu równanie $\ln U_{oL}(t) = \ln U_0 - \delta t$. Podstawiając $y = \ln U_{oL}$ i $x = t$ otrzymujemy równanie prostej $y = A + Bx$, której parametry A i B wyznaczamy metodą najmniejszych kwadratów.
2. Wykreślić zależność współczynnika tłumienia δ od oporu opornika włączonego w obwód. Zgodnie ze schematem zastępczym obwodu i definicją δ od oporu opornika R włączonego w obwód. Zgodnie ze schematem zastępczym obwodu i definicją δ zależność ta powinna być zależnością liniową o równaniu

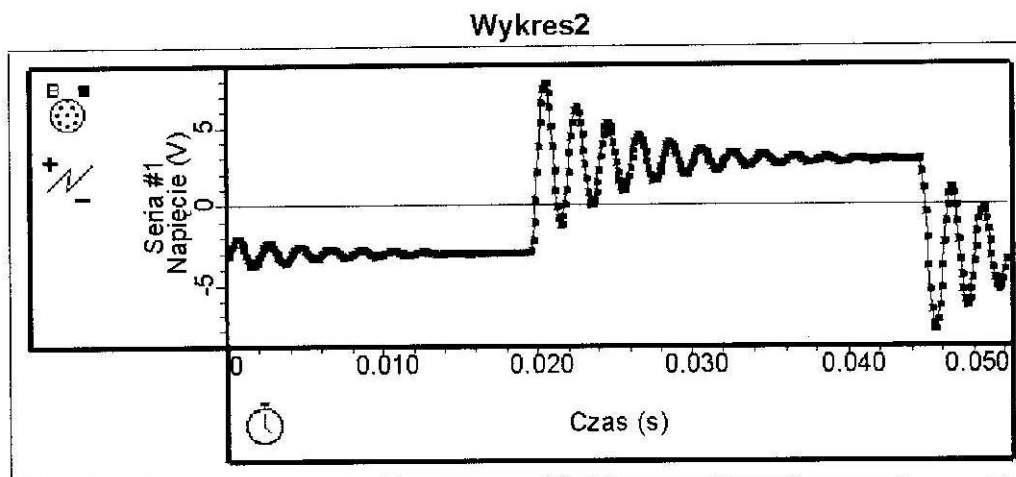
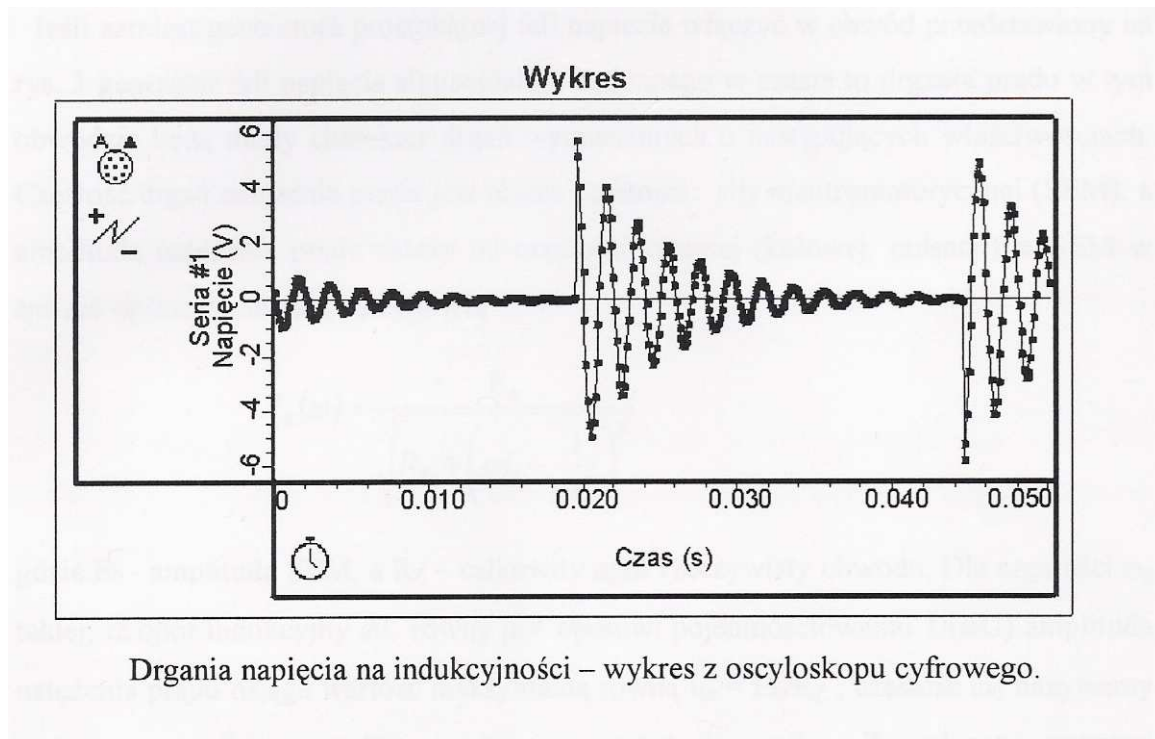
$$\delta = \frac{R + R_G + R_L}{2L} = \frac{R_G + R_L}{2L} + \frac{1}{2L}R = A + BR$$

Parametry prostej A i B wyznaczamy metodą najmniejszych kwadratów, a następnie obliczamy wartości indukcyjności L i oporu wyjściowego generatora R_G korzystając z zależności $L = 1/(2B)$ i $R_G = A/B - R_L$, gdzie wartość oporu rzeczywistego uzwojenia wy-

nosi $14\ \Omega$ z dokładnością $1\ \Omega$. Wartość pojemności C obliczamy wykorzystując wzór podający zależność okresu drgań T od wartości L i C .

3. Należy ponadto ocenić dokładność uzyskanych wyników i przeprowadzić ich dyskusję.

Dwa poniższe wykresy z oscyloskopu cyfrowego obrazują drgania napięcia na indukcyjności i kondensatorze



Uzupełnienie

Rezonans w szeregowym obwodzie RLC.

Jeśli zamiast generatora prostokątnej fali napięcia włączyć w obwód przedstawiony na rys. 3 generator fali napięcia sinusoidalnie zmiennego w czasie to drgania prądu w tym obwodzie będą miały charakter drgań wymuszonych o następujących właściwościach. Częstość drgań natężenia prądu jest równa częstości siły elektromotorycznej (SEM), a amplituda natężenia prądu zależy od częstości kątowej (kołowej, pulsacji) ω SEM w sposób opisany poniższą zależnością

$$I_o(\omega) = \frac{E_o}{\sqrt{R_Z + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

gdzie E_o – amplituda SEM, a R_Z – całkowity opór rzeczywisty obwodu. Dla częstości ω_o takiej, iż opór indukcyjny ωL równy jest oporowi pojemnościowemu $1/(\omega C)$ amplituda natężenia prądu osiąga wartość maksymalną równą $I_{or} = E_o/R_Z$, częstość ω_o nazywamy w tym przypadku częstością rezonansową natężenia prądu. Z podanego powyżej warunku wynika, iż $\omega_o = (LC)^{-1/2}$, a zatem tak zdefiniowana częstość rezonansowa jest dokładnie równa częstości drgań swobodnych, a w przybliżeniu dla słabego tłumienia także równa częstości drgań tłumionych. A tym samym przybliżeniu amplituda napięcia na indukcyjności podczas drgań wymuszonych również będzie osiągała maksimum dla częstości ω_o . Zagadnienie to jest szerzej omówione w opisie ćwiczenia E 21A, którego celem jest właśnie badanie zjawiska rezonansu w obwodzie szeregowym RLC. A zatem przełączając generator funkcyjny na wytwarzanie sinusoidalnie zmiennego w czasie napięcia i mierząc wartość częstości rezonansowej ω_o możemy wyznaczyć wartość iloczynu LC i porównać ją z wartością iloczynu indukcyjności L i pojemności C obliczonych na podstawie wyników badania drgań tłumionych. Najbardziej charakterystyczną cechą rezonansu jest to, iż amplituda i energia drgań wzbudzonych w warunkach rezonansu jest znacznie większa od amplitudy i energii czynnika wymuszającego drgania, w tym przypadku tym czynnikiem jest SEM generatora. Można przyjąć, iż dla „dobrego” obwodu rezonansowego amplituda napięcia na indukcyjności jest Q razy większa od amplitudy SEM, gdzie Q jest współczynnikiem dobroci równym liczbowo

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

W celu porównania doświadczalnej i przewidywanej wartości współczynnika dobroci należy zmierzyć w stanie rezonansu amplitudę napięcia na indukcyjności oraz pojemności, odłączyć obwód RLC od generatora (bez jego wyłączania z sieci) i zmierzyć amplitudę napięcia na jego wyjściu. Należy pamiętać, iż R w powyższym wzorze oznacza całkowity opór rzeczywisty obwodu, a nie opór opornika włączonego w szereg z indukcyjnością i pojemnością.

W przypadku wzbudzania drgań falą prostokątną możemy, zmieniając okres fali prostokątnej, zaobserwować interesujące zjawisko. Otóż dla pewnych wartości okresu fali amplituda drgań wzbudzonych osiąga maksima. Zjawisko to daje się w prosty sposób wytłumaczyć i opisać liczbowo przez porównanie harmonicznym fali prostokątnej z częstością rezonansową układu. Podstawy analizy harmonicznej i sposób jej zastosowania do opisu właściwości obwodu RLC jest tematem ćwiczenia E 32. Ponadto informacje na temat zarówno analizy harmonicznej jak i badania drgań tłumionych znaleźć można w skrypcie U.Ł. „Pracownia fizyczna dla zaawansowanych” w rozdziale poświęconym oscyloskopowi i jego zastosowaniom.