

ANALIZA HARMONICZNA

I. Cel ćwiczenia: Zapoznać z zagadnieniem rezonansu w obwodzie szeregowym RLC i zagadnieniem analizy harmoniczej.

II. Przyrządy: obwód rezonansowy, generator funkcyjny o impedancji wyjściowej nie większej niż 50Ω , częstotściomierz cyfrowy, oscyloskop. Pożądany oscyloskop dwukanałowy z niezależnym wejściem X i dodatkowy generator o dużej stabilności.

III. Literatura:

- 1▪ Ch. Kittel, Mechanika, PWN Warszawa 1969, rozdz. 7, zad. 8,9,10,14,16 (oscylator harmoniczny, oscylator harmoniczny tłumiony).
- 2▪ E. M. Purcell, Elektryczność i magnetyzm, PWN Warszawa 1971, rozdz. 8.1, 8.2 (obwody prądu zmiennego).
- 3▪ F. Grawford, Fale, PWN Warszawa 1972, rozdz. 2.3 (analiza harmoniczna).
- 4▪ Opis ćwiczenia E-21A (drgania swobodne, drgania tłumione, drgania wymuszone).
- 5▪ Pracownia fizyczna dla zaawansowanych, UŁ. rozdz. III (pomiar oscyloskopem).

IV. Wprowadzenie

IV.1 Twierdzenie Fouriera.

Twierdzenie Fouriera, według którego dowolna "rozsądna" funkcja okresowa zmiennej rzeczywistej t o okresie T może być przedstawiona jako skończony lub nieskończony szereg sinusów o okresach T , $T/2$, $T/3$... odgrywa bardzo ważną rolę w najrozmaitszych dziedzinach nauk przyrodniczych i technicznych. Zastosowania szeregów Fouriera polegają na wykorzystaniu do opisu badanych procesów tzw. analizy harmoniczej, tj. rozkładu dowolnego drgania na sumę n drgań harmonicznych o częstościach będących całkowitymi wielokrotnościami "częstości podstawowej" równej częstości danego drgania. Wyrażając się bardziej precyzyjnie można powiedzieć, że celem analizy harmoniczej jest możliwie dobre przybliżenie empirycznie znanej funkcji okresowej przez skończone szeregi trygonometryczne.

Uściślając twierdzenie Fouriera z 1822 roku możemy powiedzieć, że dowolną funkcję rzeczywistą i okresową $f(t)$ o okresie T można przedstawić w postaci szeregu Fouriera, jeśli istnieje całka:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt$$

wówczas

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)]$$

gdzie

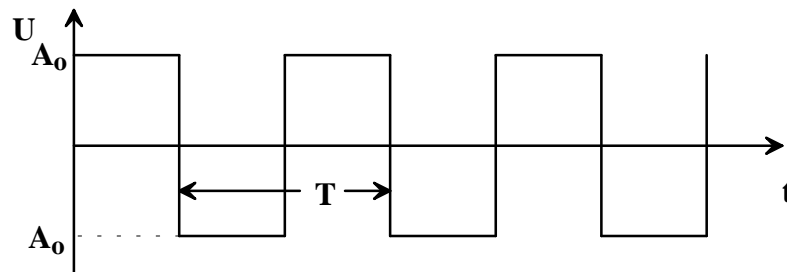
$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt ,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt ,$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Na mocy tego twierdzenia prostokątną falę o amplitudzie A_0 i okresie T możemy przedstawić w postaci szeregu:

$$U(t) = \frac{4A_0}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sin[2\pi(2l+1)t/T]}{2l+1} . \quad (1)$$



Rys.1 Symetryczna względem osi czasu t prostokątna fala napięcia

Obecnie gałąź matematyki, zapoczątkowana przez twierdzenie Fouriera i rozszerzona na funkcje nieokresowe znalazła bardzo szerokie zastosowanie w praktyce. Analizę fourierowską (harmoniczną, widmową) stosuje się wszędzie tam, gdzie zachodzi konieczność przetwarzania zmiennych w czasie sygnałów elektrycznych na ciągi liczb. Jednym ze spektakularnych "sukcesów" analizy harmonicznej jest cyfrowy zapis dźwięku. Przyrządy przeznaczone do przeprowadzania analizy harmonicznej nazywamy analizatorami widma lub analizatorami fourierowskimi.

IV.2 Rezonans w szeregowym obwodzie RLC.

Zjawisko pobudzenia układu fizycznego do drgań, których amplituda i energia mogą być niewspółmiernie wielkie w stosunku do mocy czynnika wymuszającego nosi nazwę rezonansu, a częstość drgań, dla której amplituda i energia osiągają maksimum, nazywamy rezonansem.

Jeżeli w obwód RLC (rys. 2) włączymy źródło zmiennej w czasie siły elektromotorycznej (SEM)

$$E = E_0 \sin \omega t, \quad E_0 = \text{const} \quad (2)$$

to suma chwilowych wartości spadków potencjału w obwodzie jest równa chwilowej wartości SEM

$$U_L + U_R + U_C = L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E_0 \sin \omega t \quad (3)$$

Różniczkując (3) względem czasu t otrzymamy:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \omega E_0 \cos \omega t . \quad (4)$$

Szczególnymi rozwiązaniami równania (4) są funkcje:

$$I_1(t) = I_o \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (5a)$$

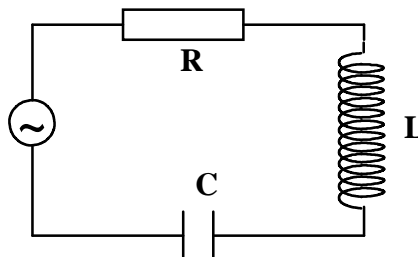
$$I_2(t) = I_o \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (5b)$$

gdzie φ_2 jest różnicą faz prądu i SEM

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (5c)$$

Amplitudę natężenia prądu wyznaczają wartości amplitudy SEM E_o i modułu impedancji (zawady) $|Z|$:

$$I_o = \frac{E_o}{|Z|} = \frac{E_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (6)$$



Rys.2 Szeregowy obwód RLC (obwód rezonansowy) ze źródłem sinusoidalnie zmiennej w czasie SEM.

Dla pewnej częstości kątowej ω_o opór indukcyjny $R_L = \omega L$ jest równy oporowi pojemnościowemu $R_C = \frac{1}{\omega C}$, co pociąga za sobą warunki:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{i} \quad f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad (\omega_o = 2\pi f_o) \quad (7)$$

Dla częstości ω_o moduł impedancji (moduł oporności zespolonej, zawady) osiąga wartość minimalną równą rzeczywistej oporności R_o całego obwodu (źródło SEM, opornik, cewka), zanika różnica między natężeniem prądu a SEM, natomiast amplituda i wartość skuteczna natężenia prądu stają się maksymalne: $I_o = E_o/R_o$, $I_{sk} = E_{sk}/R_o$.

Zależność amplitudy natężenia prądu bądź amplitudy spadku potencjału na wybranym elemencie obwodu (R, L, C) od częstości SEM nazywamy krzywą rezonansową. Krzywe rezonansowe napięcia na kondensatorze $U_{oC}(\omega_o) = \frac{1}{\omega C} I_o(\omega)$ i indukcyjności $U_{oL}(\omega_o) = \omega L I_o(\omega)$ osiągają maksima odpowiednio dla częstości kątowych

$$\omega_{oC} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_o^2}{2L^2}} \leq \omega_o \quad (8)$$

i

$$\omega_{oL} = \sqrt{\frac{2}{2LC - R_o^2 C^2}} \geq \omega_o \quad (9)$$

Dla obwodów rezonansowych o małej wartości oporności rzeczywistej i dużej wartości indukcyjności, charakteryzujących się tzw. dużą dobrocią

$$Q = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (10)$$

prawdziwe są wzory przybliżone

$$U_{oC}(\omega_0) \approx QE_0 \quad (11a)$$

i

$$U_{oL}(\omega_0) \approx QE_0 \quad (11b)$$

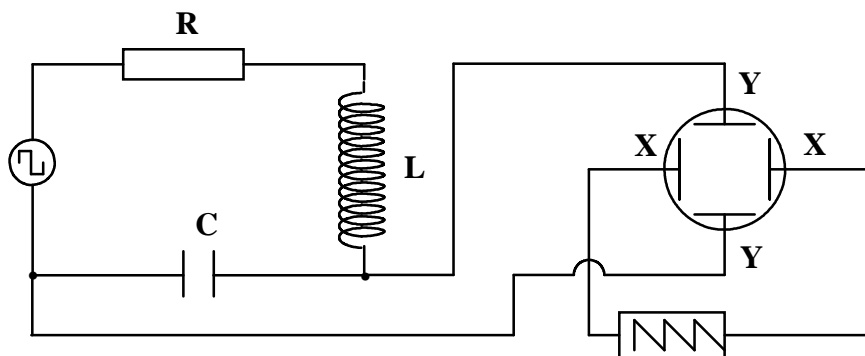
Wynika stąd, iż dla obwodów o dużej wartości współczynnika dobroci Q amplitudy napięć mierzonych na pojemności i indukcyjności w stanie rezonansu mogą być wielokrotnie większe od amplitudy SEM E_0 .

IV.3 Analiza harmoniczna

Jak wynika ze wzoru (1) prostokątną, symetryczną falę napięcia o amplitudzie A_0 i częstotliwości $f = 1/T$ można przedstawić jako superpozycję fal sinusoidalnych (harmonicznych) o amplitudach i częstotliwościach spełniających warunki:

$$A_1 = \frac{4A_0}{\pi}, f_1 = f; \quad A_1 = \frac{A_1}{3}, f_2 = 3f_1; \quad A_3 = \frac{A_1}{5}, f_3 = 5f_1 \quad A_4 = \frac{A_1}{7}, f_4 = 7f_1; \dots$$

Założmy, iż w szeregowy obwód RLC o dużej dobroci Q włączyliśmy generator (źródło) symetrycznej fali prostokątnej i tak dobraliśmy częstotliwość fali f , aby była równa częstotliwości rezonansowej tego układu $f = f_1$ (rys. 3)



Rys. 3 Ogólna idea układu pomiarowego.

Wówczas na ekranie oscyloskopowym obserwować będziemy wyraźne maksimum drgań wzbudzonych w obwodzie, a drgania te będą miały charakter drgań harmonicznych (sinusoidalnie zmiennych w czasie). Jeśli zaczniemy zmniejszać częstotliwość fali prostokątnej nie zmieniając jej amplitudy, to amplituda drgań wzbudzonych najpierw gwałtownie się zmniejszy, aby następnie ponownie osiągnąć maksimum dla częstotliwości fali prostokątnej równej $f_2 = f_1/3$, przy czym amplituda dla tej częstotliwości będzie wynosić tylko 1/3 wartości amplitudy dla częstotliwości f_1 . W przypadku dalszego zmniejszania częstotliwości fali prostokątnej zaobserwujemy maksima dla kolejnych częstotliwości $f_3 = f_1/5$, $f_4 = f_1/7$ itd.

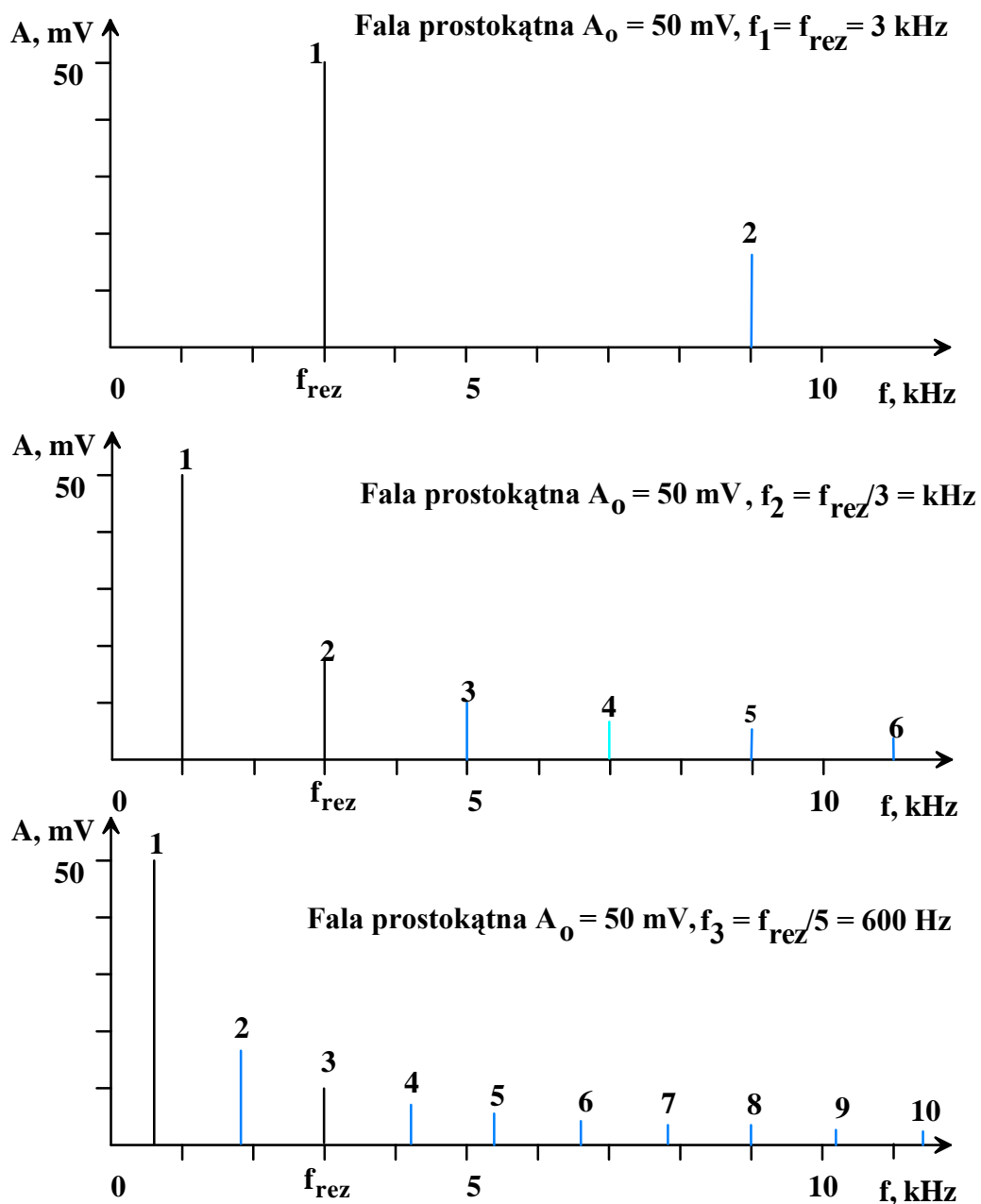
Maksymalne amplitudy drgań wymuszonych będą wynosiły odpowiednio 1/5, 1/7, itd. wartości maksymalnej amplitudy dla częstotliwości f_1 . Dzieje się tak dlatego, iż fala prostokątna o częstotliwościach $f_2, 3f_2, 5f_2, \dots$, a skoro $f_2 = f_1/3$, gdzie f_1 jest częstotliwością rezonansową, to poszczególne harmoniczne tej fali pozostają w stosunku do częstotliwości rezonansowej f_1 jak $f_1/3, f_1, 5f_1/3, \dots$. Tak więc częstotliwość drugiej harmonicznej fali prostokątnej o częstotliwości $f_2 = f_1/3$ jest równa częstotliwości rezonansowej obwodu. Odpowiednio, trzecia harmoniczna fali prostokątnej o częstotliwości $f_3 = f_1/5$ będzie

równa częstotliwości rezonansowej. Ponieważ kolejne harmoniczne mają coraz to mniejsze amplitudy drgań wzbudzonych, to maksymalne amplitudy drgań wzbudzonych w obwodzie będą coraz to mniejsze.

Jednocześnie w miarę zmniejszania częstotliwości będzie się bardziej uwypuklał tłumiony charakter drgań w obwodzie.

Gdybyśmy zastąpili źródło fal prostokątnych źródłem, którego SEM zmienia się w czasie w inny sposób, to powtarzając opisaną powyżej procedurę wzbudzilibyśmy w obwodzie drgania harmoniczne, ale sekwencja częstotliwości, dla których wystąpiłby rezonans, byłaby inna i wynikałaby wprost z analizy fourierowskiej tej SEM.

Najprostszy sposób przedstawienia wyników analizy harmonicznej określonej funkcji (drgania, fali) przedstawiono na rys. 4.

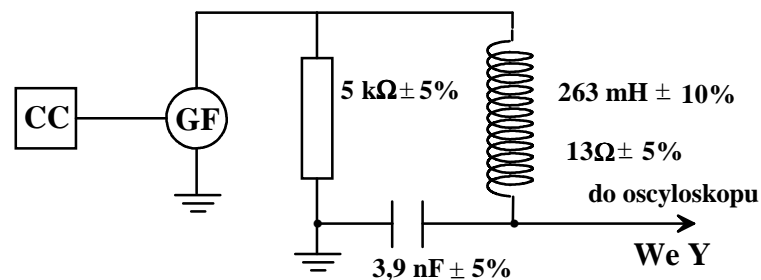


Rys. 4 Widmo harmonicznych trzech fal prostokątnych (w przedziale częstotliwości od 0 Hz do 12 kHz). — amplitudy dla częstotliwości mierzonych doświadczalnie.

Przedstawia on zależność amplitudy kolejnych harmonicznych od częstości (widmo harmonicznych). W bardziej skomplikowanych przypadkach wykres ten należy jeszcze uzupełnić wykresem zależności faz poszczególnych harmonicznych od częstości, aby w pełni przedstawić daną falę czy pojedynczy impuls. Na rysunku 4 zilustrowano ponadto procedurę przeprowadzenia analizy harmonicznej fali prostokątnej metodą wzbudzenia obwodu rezonansowego. Jeżeli częstość rezonansowa i dobroć obwodu wynoszą odpowiednio $f_{\text{rez}} = 3 \text{ kHz}$ i $Q = 100$, to zjawisko rezonansu wystąpi np. dla fali prostokątnej o częstości $f_1 = 3 \text{ kHz}$ (amplituda napięcia na kondensatorze $U_{C1} \approx 5 \text{ V}$), $f_2 = 1 \text{ kHz}$ ($U_{C2} \approx 1,67 \text{ V}$), $f_3 = 600 \text{ Hz}$ ($U_{C3} \approx 1 \text{ V}$). Przewidywana (w przybliżeniu) maksymalna amplituda napięcia na kondensatorze równa jest iloczynowi współczynnika dobroci Q i amplitudy tej harmonicznej, której częstość jest równa częstości rezonansowej. Dokładność tej metody jest tym większa, im większa jest wartość dobroci Q .

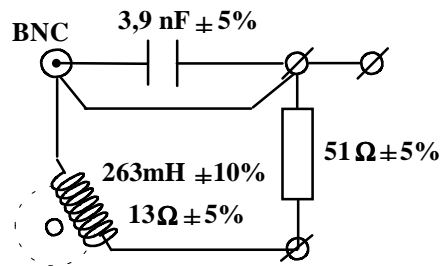
V. Pomiary

- 1▪ Połączyć przyrządy wg schematu przedstawionego na rys. 5. Obwód rezonansowy powinien być zasilany z wyjścia o impedancji nie większej niż 50Ω , częstościomierz cyfrowy najlepiej połączyć z jednym z wyjść pomocniczych generatora funkcyjnego.



Rys. 5 Układ pomiarowy: CC - częstościomierz cyfrowy, GF generator funkcyjny, We Y - wejście Y oscyloskopu.

- 2▪ Wyznaczyć krzywą rezonansową obwodu RLC zasilanego napięciem sinusoidalnie zmiennym w czasie. Szczególnie dokładnie wyznaczyć wartości częstości rezonansowej i amplitudy drgań w stanie rezonansu.
- 3▪ Dostroić generator do częstości rezonansowej obwodu, odłączyć obwód od generatora, połączyć wyjście generatora z wejściem Y oscyloskopu i zmierzyć z maksymalną dokładnością amplitudę napięcia wyjściowego generatora.
- 4▪ Ustawić przełącznik rodzaju napięcia wyjściowego generatora w pozycji "fala prostokątna". Wyznaczyć częstości, dla których występuje zjawisko rezonansu i zmierzyć maksymalną amplitudę drgań dla każdej z tych częstości, pamiętając, iż drgania wzbudzone w tym obwodzie RLC falą prostokątną są drganiami tłumionymi o wykładniczo malejącej w czasie amplitudzie.
- 5▪ Odłączyć generator od obwodu RLC, połączyć wyjście generatora z wejściem Y oscyloskopu i z maksymalną dokładnością zmierzyć amplitudę fali prostokątnej.
- 6▪ Pożądane jest praktyczne zapoznanie się z alternatywną metodą wykonania pomiarów, opisaną w Uzupełnieniu.



Rys. 6 Schemat płytki montażowej obwodu RLC.

VI. Opracowanie wyników

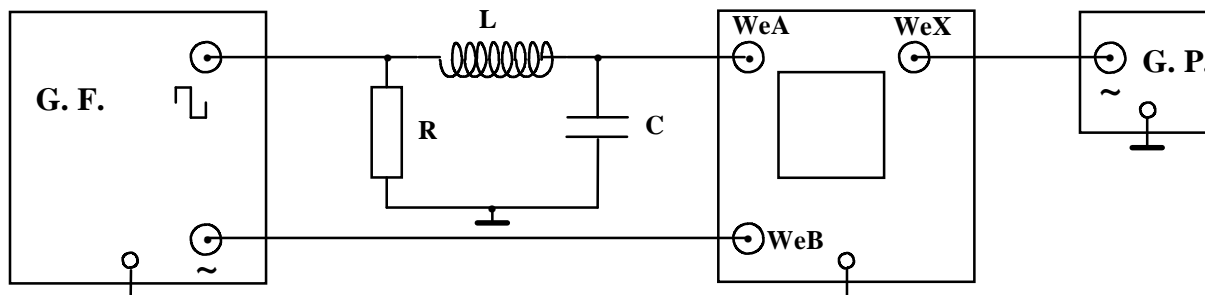
- 1▪ Wykreślić krzywą rezonansową amplitudy napięcia na kondensatorze.
- 2▪ Obliczyć przewidywane na podstawie wzorów teoretycznych i danych liczbowych na schemacie wartości częstości rezonansowej, współczynnik dobroci i amplitudy napięcia na kondensatorze w stanie rezonansu (obwód zasilany napięciem sinusoidalnie zmiennym). Porównać te wartości z wynikami pomiarów.
- 3▪ Obliczyć przewidywane wartości częstości oraz maksymalnych amplitud w stanach rezonansu (obwód zasilany falą prostokątną) i porównać je z wartościami zmierzonymi. Narysować przewidywane i wyznaczone doświadczalnie widmo harmoniczných.
- 4▪ Obliczyć przewidywane i doświadczalne wartości stosunków częstości fal prostokątnych (oraz amplitud), dla których występuje rezonans do częstości rezonansowej (amplitudy w stanie rezonansu). Przeprowadzić dyskusję wyników.

UWAGA!

Opisana metoda wykonania analizy harmoniczných nie jest w istocie rzeczą metodą wykonania analizy harmoniczných konkretnej fali prostokątnej (taką analizę można wykonać jedynie za pomocą analizatora widma) lecz metodą pozwalającą sprawdzić doświadczalnie poprawność rozwinięcia prostokątnej fali napięcia w szereg Fouriera.

Uzupełnienie

Bardzo efektywną metodą zilustrowania zagadnienia analizy harmonicznej jest metoda polegająca na obserwacji figur Lissajous, powstających na ekranie oscyloskopu, połączonego z obwodem rezonansowym tak, jak to pokazano na rys. 7



Rys.7 Układ pomiarowy: G.F. - generator funkcyjny, G.P. - generator pomocniczy dostrójony do częstości rezonansowej obwodu RLC, oscyloskop pracujący jednocześnie w trybie XY i trybie "siekanego" (chopped) przełączania przełącznika elektronicznego (jednoczesna praca XY i praca dwukanałowa).

Metodę tę możemy z powodzeniem zastosować, jeśli dysponujemy:

- 1^o oscyloskopem umożliwiającym uzyskanie dwóch wykresów na ekranie podczas pracy XY,
- 2^o generatorem funkcyjnym wyposażonym w dwa synchroniczne wyjścia fali prostokątnej i fali sinusoidalnej,
- 3^o dodatkowym generatorem fali sinusoidalnej o dużej stabilności (generator pomocniczy)
- 4^o obwodem rezonansowym o dużej dobroci. Generator pomocniczy dostrajamy bardzo dokładnie do częstości rezonansowej obwodu. Jak wynika z wcześniejszych rozważań, częstości fali prostokątnej, dla których uzyskamy stan rezonansu, pozostają w stosunku do częstości rezonansowej obwodu, jak 1:1, 1:3, 1:5 ... itd. Skoro zaś częstość drgań wzbudzonych w obwodzie jest zawsze równa częstości rezonansowej obwodu, to dla każdej z częstości fali prostokątnej, inicjującej stan rezonansu otrzymamy na ekranie dwie figury Lissajous, z których jedna odpowiadać będzie stosunkowi częstości 1:1 i której wysokość będzie zależała od amplitudy drgań w stanie rezonansu, natomiast druga wyrażać będzie aktualną wartość stosunku częstości fali prostokątnej do częstości rezonansowej obwodu.