

REZONANS PRĄDOWY

- I. Cel ćwiczenia:** zapoznanie z problematyką rezonansu prądowego, wyznaczenie charakterystyk prądowych obwodu, częstości rezonansowej, współczynnika dobroci i tłumienia, pasma przenoszenia obwodu, wyznaczenie oporności zespolonej całego obwodu w stanie rezonansu.
- II. Przyrządy:** płytki montażowa obwodu RLC, generator mocy, amperomierze.
- III. Literatura:**
1. E. Purcell – „Elektryczność i magnetyzm”,
 2. H. Szydłowski – „Pracownia fizyczna”,
 3. S. Malzacher – „Laboratorium elektroniki stosowanej”,
 4. T. Masewicz, S. Paul – „Podstawy Elektrotechniki”.

IV. Wprowadzenie

W obwodach prądu przemiennego zawierających pojemność i indukcyjność, reaktancja indukcyjna X_L jest proporcjonalna do częstości, a reaktancja pojemnościowa X_C jest odwrotnie proporcjonalna do częstości. Dla pewnej częstości, zwanej częstością rezonansową, wartości bezwzględne obu reaktancji stają się równe co powoduje, że reaktancje te wzajemnie się znoszą. Obwód zachowuje się jakby zawierał tylko rezystancję. Zjawisko to nazywamy rezonansem, a obwód w którym może ono powstać zwany jest obwodem rezonansowym.

W ćwiczeniu tym badamy obwód rezonansowy równoległy, w którym do źródła napięcia przemiennego dołączone są indukcyjność L , pojemność C i oporność R połączone równolegle.

Dla rozważań teoretycznych przyjmujemy następujące **oznaczenia:**

R – oporność rzeczywista (rezystancja)

X – oporność pozorna, inaczej część urojona impedancji (reaktancja)

Z – oporność zespolona (impedancja)

G – przewodność rzeczywista (konduktancja)

B – przewodność pozorna, część urojona admitancji (susceptancja)

Y – przewodność zespolona

Z - moduł impedancji, zawada

$\underline{Z} = \mathbf{R} + i\mathbf{X}$

$\underline{Y} = \mathbf{G} + i\mathbf{B}$

$i^2 = -1$

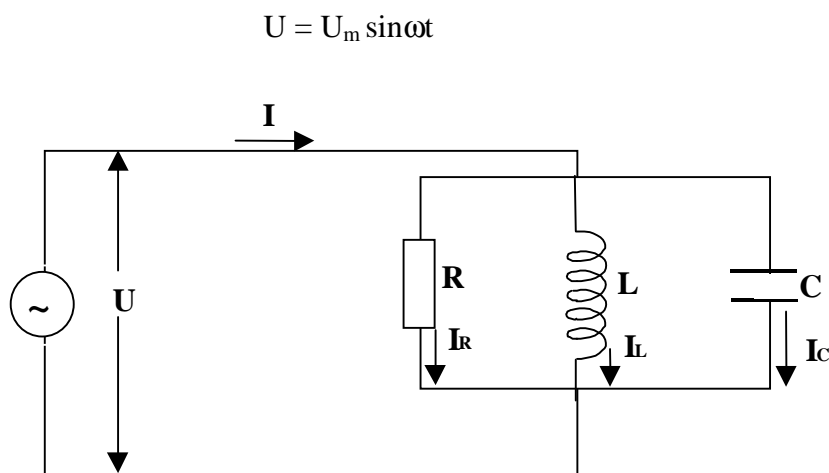
Terminy podane w nawiasach są stosowane w literaturze technicznej i podręcznikach elektrotechniki.

IV.1 Równoległy obwód RLC o idealnych elementach.

W równoległym obwodzie RLC wektorowa suma natężeń prądu w poszczególnych elementach równa się natężeniu prądu płynącego ze źródła siły elektromotorycznej:

$$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C$$

Załóżmy, że napięcie zmienne U można przedstawić w postaci:



Rys.1 Równoległy obwód RLC z zewnętrznym źródłem napięcia zmiennego.

Wówczas natężenie prądu płynącego przez opornik R wyniesie

$$I_R = \frac{U_m}{R} \sin \omega t$$

Natężenie prądu w cewce L jest opóźnione w stosunku do napięcia U o kąt przesunięcia fazowego równy $\frac{\pi}{2}$, zatem

$$I_L = \frac{U_m}{\omega L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{U_m}{\omega L} \cos \omega t$$

Natężenie prądu w kondensatorze wyprzedza w fazie o $\frac{\pi}{2}$ napięcie U

$$I_C = U_m \omega C \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = U_m \omega C \cos \omega t$$

Sumując natężenia prądu I_R , I_L i I_C otrzymujemy

$$I = I_R + I_L + I_C = U_m \left[\frac{1}{R} \sin \omega t - \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \cos \omega t \right] \quad (1)$$

Wprowadzimy teraz następujące oznaczenia:

$$G = \frac{1}{R} \text{ - przewodność rzeczywista}$$

$$B_L = \frac{1}{\omega L} \text{ - przewodność pozorna indukcyjna}$$

$$B_C = \omega C \text{ - przewodność pozorna pojemnościowa}$$

Jednostką powyższych wielkości jest simens (S).

Po wprowadzeniu przewodności równanie (1) przybiera postać

$$I = U_m [G \sin \omega t + (B_C - B_L) \cos \omega t] \quad (2)$$

Równanie (2) mnożymy stronami przez

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}$$

i wprowadzając kąt φ , określony wzorami

$$\sin\varphi = \frac{B_C - B_L}{\sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}} \quad (3a)$$

$$\cos\varphi = \frac{G}{\sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}} \quad (3b)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B_C - B_L}{G}, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad (3c)$$

otrzymujemy po elementarnym przekształceniu

$$I = Y U_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

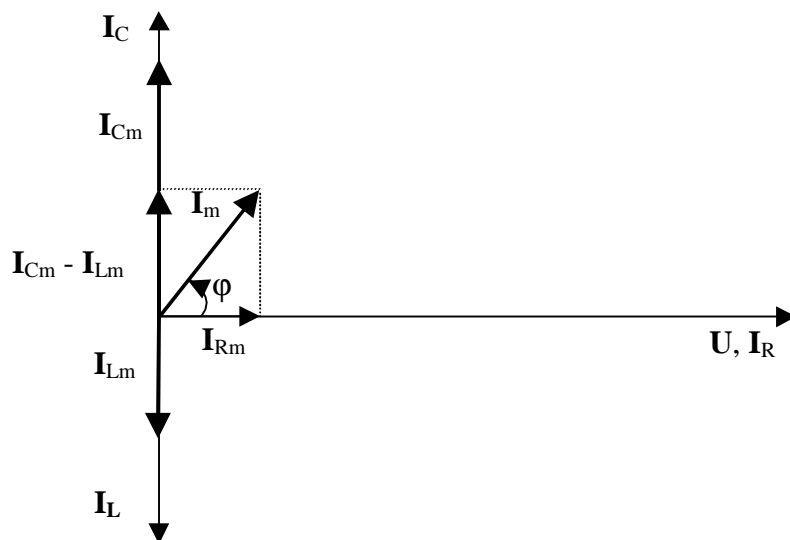
Wielkość $Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}$ (5)

nazywamy modulem przewodności zespolonej obwodu równoległego RLC.

Moduł przewodności zespolonej obwodu jest równy odwrotności modułu oporności zespolonej tego obwodu:

$$Y = \frac{1}{Z}$$

Jak wynika ze wzorów (3) i (4) kąt φ jest kątem przesunięcia fazowego między napięciem (siłą elektromotoryczną), a natężeniem prądu płynącego w obwodzie, wartość zaś tego kąta zależy od parametrów R, L, C, oraz częstotliwości.



Rys. 2 Diagram wektorowy (wykres wskazowy) dla obwodu równoległego RLC

Powyższe rozważania można zilustrować graficznie posługując się tzw. diagramem wektorowym (wykresem wskazowym), przedstawionym na rys.2.

$$I_{Rm} = U_m G \quad (6a)$$

$$I_{Lm} = U_m B_L \quad (6b)$$

$$I_{Cm} = U_m B_C \quad (6c)$$

$$I_m = U_m Y \quad (6d)$$

W oparciu o diagram przedstawiony na rys.2 można otrzymać między innymi zależności (3) i (5).

Zasady konstrukcji diagramów wektorowych są podane w pozycji (4) literatury. Jak wynika z przytoczonych zależności można wyodrębnić trzy zasadnicze przypadki:

1. $B_L > B_C, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0$
2. $B_C > B_L, 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
3. $B_L = B_C, \varphi = 0$

Przypadek 3 jest najbardziej interesujący z fizycznego punktu widzenia, gdyż spełnienie warunku $B_L = B_C$ jest równoznaczne ze spełnieniem warunku rezonansu prądowego.

IV.2 Rezonans prądowy

Warunkiem rezonansu w równoległym obwodzie RLC jest zerowa wartość całkowitej przewodności pozornej tego obwodu:

$$B = B_C - B_L = 0 \quad (7)$$

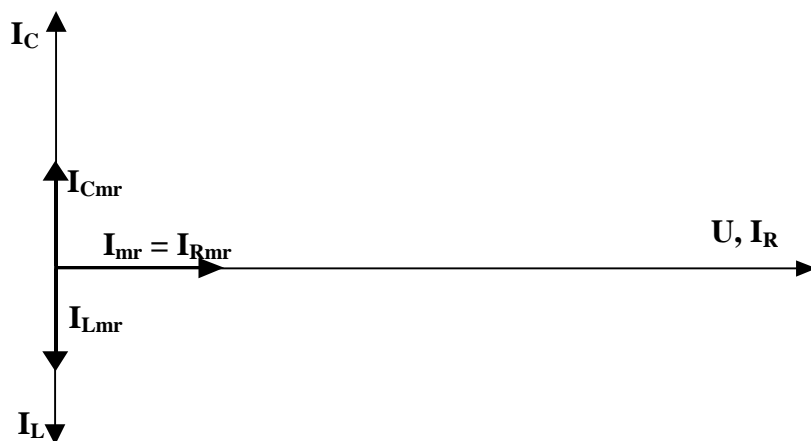
Warunek (7) może być spełniony tylko dla ściśle określonej częstości, zależnej od parametrów L i C obwodu:

$$B_{Cr} = B_{Lr}$$

Z ostatniej równości wynika

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (8)$$

Diagram wektorowy dla równoległego obwodu RLC w stanie rezonansu jest przedstawiony na rys.3



Rys.3 Diagram wektorowy dla równoległego obwodu RLC w stanie rezonansu.

Diagram ilustruje cechy charakterystyczne dla stanu rezonansu, a mianowicie:

1. Natężenia prądów w gałęziach L i C są równe i przesunięte w fazie o π , a więc prądy te płyną w przeciwnych kierunkach
2. Amplituda całkowitego natężenia prądu w obwodzie jest równa amplitudzie natężenia prądu płynącego przez gałąź R.:

$$I_{mr} = I_{Rmr} = \frac{U_m}{R} = U_m G \quad (9)$$

3. Kąt przesunięcia fazowego między natężeniem prądu, a napięciem wynosi 0. Ze względu na to, że w stanie rezonansu występuje równowaga się natężeń prądów w

cewce i kondensatorze, rezonans w tym obwodzie nazywamy rezonansem prądowym równoległym.

Amplitudy natężeń prądów wynoszą odpowiednio:

$$I_{Lmr} = U_m B_{Lr}$$

a ponieważ

$$I_{mr} = U_m G$$

i

$$I_{Cmr} = U_m B_{Cr}$$

to

$$I_{Lmr} = I_{mr} \frac{B_{Lr}}{G} \quad (10a)$$

$$I_{Cmr} = I_{mr} \frac{B_{Cr}}{G} \quad (10b)$$

$$I_{Lmr} = I_{Cmr} \quad (10c)$$

Natężenia prądów w cewce i kondensatorze mogą być większe w rezonansie od prądu pobieranego ze źródła – mówimy wówczas o przetężeniu.

Wielkość przetężenia możemy powiązać tzw. współczynnikiem dobroci obwodu. Współczynnik dobroci obwodu definiujemy jako bezwymiarowy stosunek Q :

$$Q = \omega_0 \frac{\text{energia zmagazynowana w obwodzie}}{\text{średnia moc rozproszona}} \quad (11)$$

gdzie $\omega_0 = 2\pi f_r$

Tak zdefiniowana dobroć obwodu odnosi się zatem do stanu rezonansu i nazywana bywa dobrocią w rezonansie (Q_r).

Dobroć obwodu wskazuje, o czym wspomniano określając przetężenie, ile razy prąd w gałęzi z indukcyjnością lub w gałęzi z pojemnością jest większy od prądu dopływającego do obwodu rezonansowego

Całkowita energia zmagazynowana w obwodzie RLC w stanie rezonansu jest równa:

$$W = \frac{1}{2} L I_{Lmr}^2 = \frac{1}{2} C U_{rm}^2 \quad (12)$$

Średnia moc rozproszona dla obwodu równoległego RLC wyraża się wzorem:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} R I_{Rm}^2 = \frac{1}{2} R I_{mr}^2 \quad (13)$$

Stąd otrzymujemy teoretyczną wartość dobroci obwodu w rezonansie:

$$Q_r = R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (14)$$

Odwrotność współczynnika dobroci obwodu nazywamy współczynnikiem tłumienia obwodu i oznaczamy przez θ_r

$$\theta_r = \frac{1}{Q_r} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (15)$$

Ponieważ

$$Q^2 = \frac{B_{Lr}}{G} \frac{B_{Cr}}{G} = R^2 \frac{C}{L}$$

możemy wzory (10) przepisać w postaci:

$$I_{Lmr} = I_{mr} Q_r = I_{mr} \frac{1}{\theta_r} \quad (16a)$$

$$I_{Cmr} = I_{mr} Q_r = I_{mr} \frac{1}{\theta_r} \quad (16b)$$

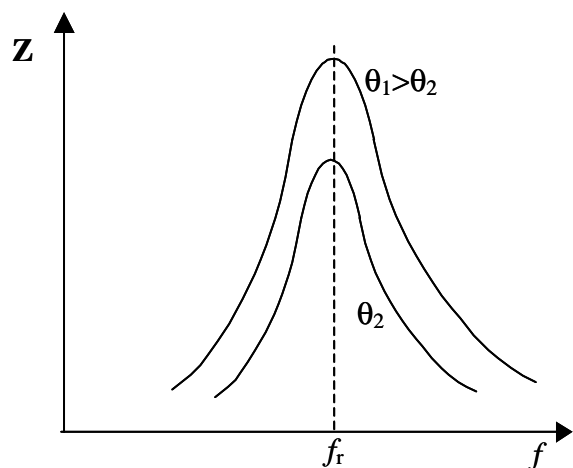
Ze wzorów (4), (5) i (6) wynika, że natężenie prądu w obwodzie jest funkcją częstości napięcia zasilającego obwód i osiąga ono wartość minimalną dla częstości rezonansowej.

Wykres zależności $I = I(f)$ nazywamy **krzywą rezonansową**.

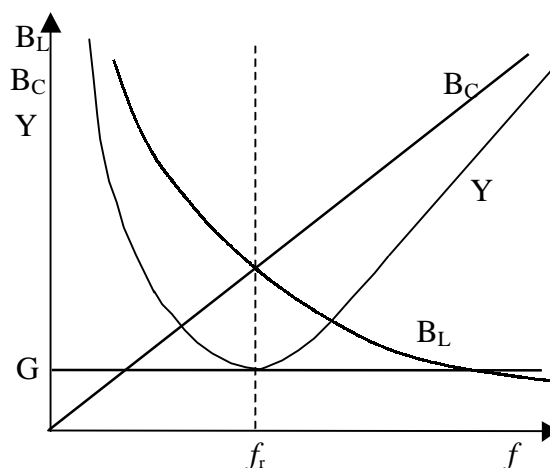
Ponieważ amperomierz mierzy wartość skuteczną natężenia prądu, która jest związana z amplitudą prądu relacją $\sqrt{2}I_{sk} = I_m$, to ściśle biorąc wykres krzywej rezonansowej jest zależnością $I_{sk} = I_{sk}(f)$ lub $I_m = I_m(f)$. Często pomijamy dolne indeksy „sk” lub „m”, mając świadomość co reprezentuje symbol I w zależności $I = I(f)$.

Przewodność zespolona obwodu \underline{Y} jest również funkcją częstości i osiąga minimum równe wartości przewodności rzeczywistej G obwodu przy częstości rezonansowej f_r .

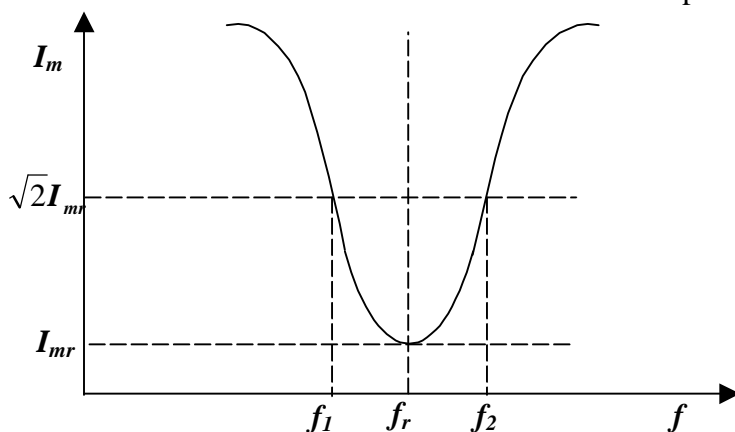
Kształt krzywej $Z(f)$ jest odwróceniem krzywej $Y(f)$. Na rys. 4 przedstawiono krzywe $Z(f)$ dla różnych wartości θ .



Rys.4 Kształt krzywych modułu oporności zespolonej Z w funkcji częstości dla różnych wartości θ .



Rys.5 Zależność przewodności indukcyjnej B_L , pojemnościowej B_C , rzeczywistej G i modułu przewodności zespolonej obwodu Y .



Rys.6 Krzywa rezonansu prądowego

Wprowadźmy teraz wielkość, nazywaną szerokością pasma przenoszenia obwodu, a definiowaną jako zakres częstości $f_1 \div f_2$, na krańcach którego natężenie prądu w obwodzie osiąga wartość $\sqrt{2} I_{mr}$.

Szerokość pasma przenoszenia obwodu można powiązać z wartością współczynnika dobroci Q lub współczynnika tłumienia θ .

Przesunięcie fazowe prądu względem napięcia wyraża się wzorem:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{\frac{1}{R}} \quad (17)$$

mnożymy licznik i mianownik przez $\sqrt{\frac{L}{C}}$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{\omega L} \sqrt{\frac{L}{C}} - \omega C \sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{\frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{1}{LC}} - \omega \sqrt{LC}}{\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Oznaczając $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ przez ω_0 i korzystając ze wzoru (15) otrzymamy:

$$\operatorname{tg}\varphi = - \frac{1}{\theta_r} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = - \theta_r \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (18)$$

Amplituda natężenia prądu pobieranego ze źródła wyraża się wzorem:

$$I_m = U_m G \sqrt{1 + \left(\frac{B_L - B_C}{G} \right)^2} \quad (19)$$

W warunkach rezonansu amplituda prądu osiąga wartość

$$I_{mr} = U_m G = \frac{U_m}{R} \quad (20)$$

Podstawiając do wzoru (19) wyrażenia na B_L , B_C i G i korzystając ze wzoru (20) otrzymamy:

$$I_m(\omega) = I_{mr} \sqrt{1 + \frac{1}{\theta_r^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \quad (21)$$

Rozwiązując równanie (21) względem ω dla wartości $I_m = \sqrt{2} I_{mr}$ otrzymamy:

$$\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}} = \pm \theta_r \quad (22)$$

gdzie ω_1 , ω_2 są częstościami kołowymi dla których zachodzi:

$$\frac{I_m}{I_{mr}} = \sqrt{2} \quad (23)$$

stąd

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \theta_r \quad (24)$$

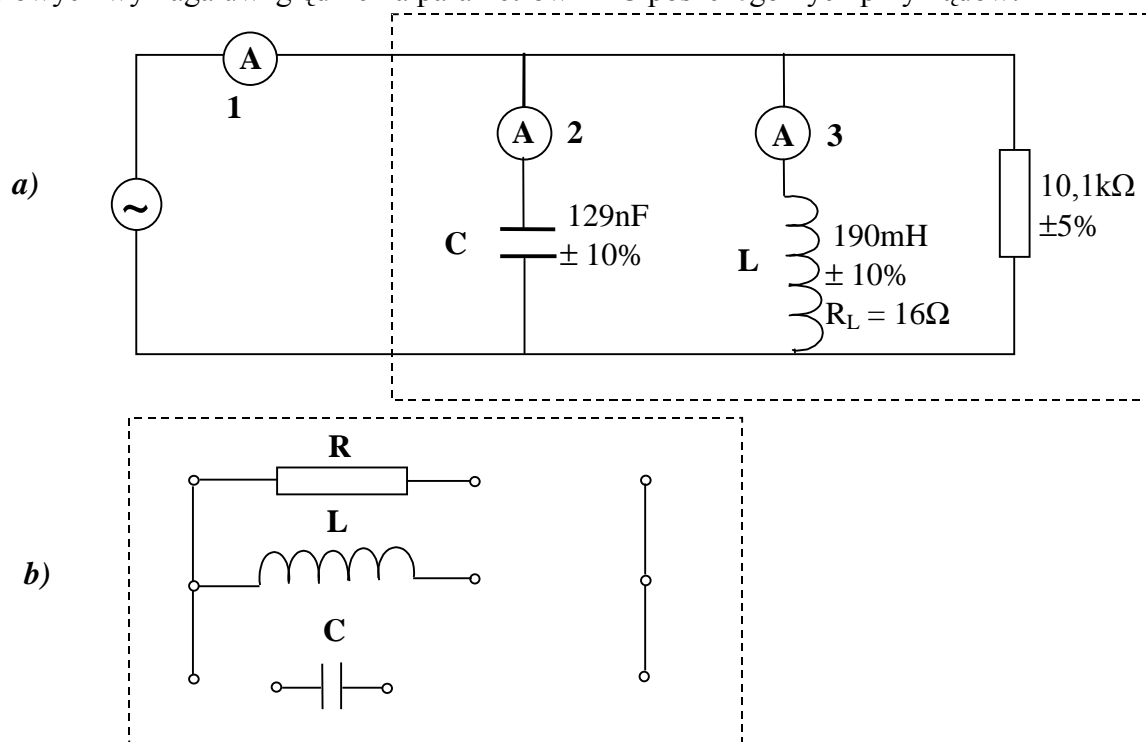
lub

$$f_2 - f_1 = \Delta f = f_r \theta_r \quad (25)$$

Zgodnie z ogólnie przyjętą terminologią możemy nazwać f_1 dolną częstotliwością graniczną, a f_2 górną częstotliwością graniczną. Obwód rezonansowy o paśmie przenoszenia $\Delta f = f_2 - f_1$ może zatem spełniać funkcję filtra częstotliwości. Stosunek określony wzorem (23) jest umownie przyjętą wartością dla określenia częstotliwości granicznej w fizyce, elektrotechnice i elektronice, jeżeli do opisu stosunku wartości wielkości fizycznych stosowana jest skala logarymiczna wyrażona w decybelach to tłumienie o wartości równej $\sqrt{2}$ odpowiada wartości -3 dB. Dobroć obwodu jest wielkością fizyczną często używaną w praktyce, gdyż pozwala określić zarówno pasmo przenoszenia danego układu elektrycznego jak i wielkości energii rozproszonej w tym układzie, a w układach typu rezonansowego umożliwia znalezienie wartości przetężenia (obwód równoległy) i przepięć (rezonans napięciowy w obwodzie szeregowym). Szeregowe obwody rezonansowe, sterowane np. w odbiornikach radiowych czy telewizyjnych z reguły charakteryzują się bardzo wysoką wartością współczynnika dobroci.

IV.3 Obwód rzeczywisty

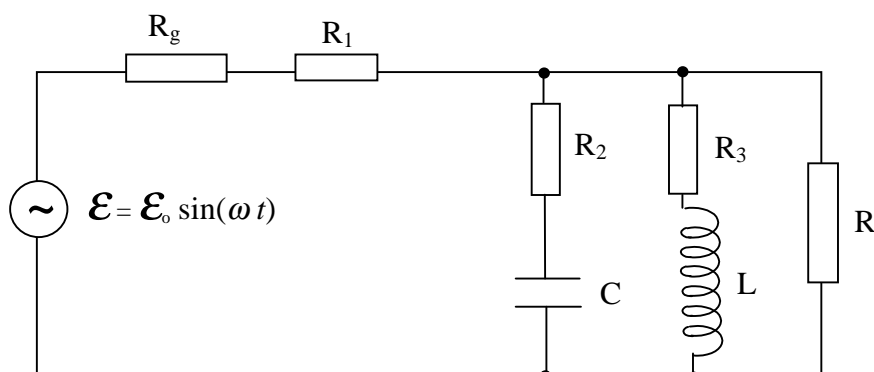
Dokładne wyznaczenie teoretyczne wartości częstotliwości rezonansowej rzeczywistego układu doświadczalnego, złożonego z generatora RC, obwodu rezonansowego i przyrządów pomiarowych wymaga uwzględnienia parametrów RLC poszczególnych przyrządów.



Rys.7 Schemat układu pomiarowego do badania zjawisk rezonansu prądowego (a) i schemat połączeń wewnętrznych płytki montażowej obwodu RLC (b).

Spróbujemy przewidzieć, jaka będzie wartość częstotliwości rezonansowej rzeczywistej układu RLC, przedstawionego na rys.7, a składającego się z generatora mocy, amperomierzy i obwodu RLC.

Jeżeli w pierwszym przybliżeniu zaniedbamy wpływ pojemności i indukcyjności wyjściowych (wewnętrznych) generatora, oraz mierników to równoważny schemat elektryczny układu pomiarowego przyjmie taką postać, jak na rys.8.



Rys. 8 Uproszczony schemat zastępczy układu pomiarowego.

R_g – oporność wyjściowa (wewnętrzna) generatora;

R_1, R_2 – oporność wewnętrzna mierników 1,2;

$R_3 = R_3^* + R_L$, gdzie R_3^* jest opornością wewnętrzną miernika 3;

R_L – oporność rzeczywista indukcyjności L .

Częstość drgań własnych (rezonansowych) takiego układu jest opisana wzorem:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_3^2 - \frac{L}{C}}{R_2^2 - \frac{L}{C}}} \quad (26)$$

V. Pomiary

UWAGA! Maksymalne napięcie zasilania obwodu wynosi 7,75V.

1. Z badać zależność I , I_C i I_L od częstości przy stałych, w miarę możliwości, zakresach czułości mierników – dla $L = 0,19\text{H}$, $C = 129\text{ nF}$, $R = 10,1\text{k}\Omega$ zalecany zakres czułości $0,015\text{A}$ przy napięciu wyjściowym generatora (nieobciążonego) $7,5\text{V}$, pracującego na zakresie $7,75\text{V}/6\Omega$ i $(200\div 2000)\text{Hz}$.
2. Powtórzyć pomiary dla obwodów o parametrach:
 $L = 0,19\text{H}$, $R = 10,1\text{k}\Omega$, $C_1 = 194\text{nF}$ oraz
 $L = 0,19\text{H}$, $R = 10,1\text{k}\Omega$, $C_2 = 64,5\text{nF}$.

VI. Opracowanie wyników.

1. Przedstawić zależności $I(f)$, $I_L(f)$ i $I_C(f)$ na wspólnym dla każdej pojemności C , C_1 , C_2 , wykresie.
2. Wyznaczyć częstości rezonansowe, współczynnik dobroci i tłumienia oraz pasma przenoszenia obwodów.
 Oszacować błędy i porównać otrzymane wyniki z przewidywanymi na podstawie wzorów teoretycznych.

Określić wpływ oporności wewnętrznych przyrządów na wartość dobroci i współczynnika tłumienia obwodu.

- 3.** Wyznaczyć oporności zespolone całego obwodu w stanie rezonansu.
- 4.** Ocenic, czy schemat zastępczy, przedstawiony na rys.8 jest dobrym (tzn. dopuszczalnym w granicach błędów doświadczalnych i dokładności z jaką znamy wartości poszczególnych elementów) przybliżeniem pełnego schematu zastępczego.
- 5.** Przeprowadzić dyskusję wyników.