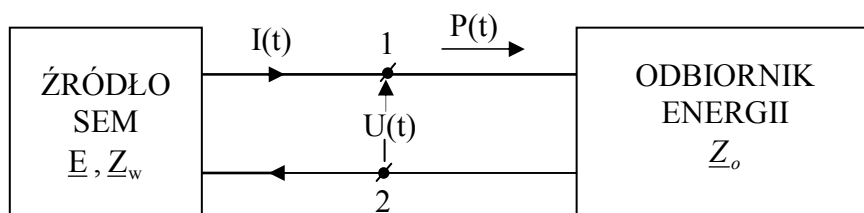


POMIAR MOCY PRĄDU ZMIENNEGO METODĄ OSCYLOSKOPOWĄ

- I. Cel ćwiczenia:** Pomiar mocy prądu zmiennego za pomocą oscyloskopu, pomiar różnicy faz oscyloskopem, ocena dokładności metody.
- II. Przyrządy:** Oscyloskop, nieznaną pojemność i indukcyjność, opornik dekadowy, kondensator dekadowy, opornik, generator mocy lub autotransformator, transformator, woltomierz.
- III. Literatura:** [1] W. Rydzewski „Oscyloskop elektroniczny”
[2] R.P. Feynman „Feynmana wykłady z fizyki” tom I część 1 rozdz. 22, tom II część 2 rozdz. 22.
[3] E.M. Purcell „Elektryczność i magnetyzm” rozdz. 8.

IV. Wstęp

Źródło zmiennej w czasie SEM jest połączone poprzez zaciski 1 i 2 z odbiornikiem energii o impedancji (oporności zespolonej) \underline{Z}_o (rys.1) (kreska pozioma pod symbolem impedancji czyli pod literą Z oznacza liczbę zespoloną).



Rys.1

Elementarną pracę źródła SEM równą energii dostarczonej odbiornikowi przedstawić możemy w postaci:

$$dW = E I dt$$

jeśli impedancja wewnętrzna źródła jest do zaniedbania tj., gdy $|\underline{Z}_w| \ll |\underline{Z}_o|$. Praca wykonana w ciągu jednego okresu równa się sumie prac elementarnych czyli

$$W = \int_0^T E I dt$$

a średnia moc

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T E I dt$$

Rozważmy przypadek SEM sinusoidalnie zmiennej w czasie i prądu opóźnionego w stosunku do SEM o kąt przesunięcia fazowego φ – wówczas:

$$E = E_0 \cdot \cos \omega t$$

$$I = I_0 \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

Co daje

$$\bar{P} = \frac{E_o I_o}{T} \int_0^T \cos \omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi) dt = \frac{E_o I_o}{2T} \int_0^T [\cos \omega t + \cos(2\omega t - \varphi)] dt$$

Ponieważ

$$\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) dt = 0$$

to

$$\bar{P} = \frac{E_o I_o}{2} \cos \varphi \quad (1)$$

lub wprowadzając pojęcie wartości skutecznej I_s , zdefiniowanej dla natężenia prądu jako

$$I_s^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [I(t)]^2 dt = \frac{I_o^2}{2},$$

$$I_s = \frac{1}{\sqrt{2}} I_o$$

otrzymujemy

$$\bar{P} = E_s I_s \cos \varphi \quad (2)$$

gdzie

$$E_s = \frac{E_o}{\sqrt{2}}$$

W przypadku, kiedy jest spełniony warunek $|\underline{Z}_w| \ll |\underline{Z}_o|$ wzory (1) i (2) zastępujemy wzorami :

$$\bar{P} = \frac{U_o I_o}{2} \cos \varphi \quad (3)$$

lub

$$\bar{P} = U_s I_s \cos \varphi \quad (4)$$

gdzie U_o jest amplitudą, a U_s wartością skuteczną napięcia mierzonego na zaciskach 1, 2 odbiornika energii (rys.1).

Średnia moc \bar{P} bywa nazywana mocą **czynną** w przeciwieństwie do tzw. mocy **bierniej**

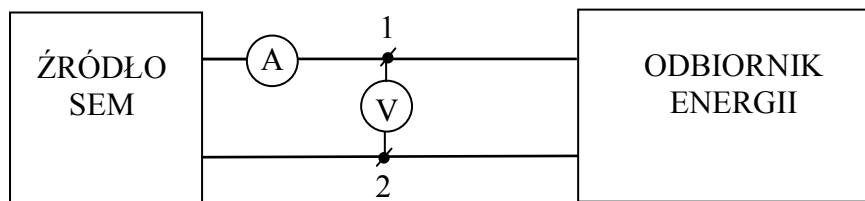
$$P_b = \frac{U_o I_o}{2} \sin \varphi = U_s I_s \sin \varphi$$

oraz modułu mocy zespolonej zwanej mocą **pozorną**

$$P_p = U_s I_s$$

V. Wyznaczanie mocy średniej z charakterystyki prądowo – napięciowej układu: źródło SEM – odbiornik energii.

Charakterystyką prądowo – napięciową danego układu nazywamy funkcję $I = f(U)$, opisującą zależność natężenia prądu płynącego przez ten układ od przyłożonego napięcia. Charakterystykę taką w najprostszym przypadku wyznaczyć możemy za pomocą amperomierza i woltomierza o dużej oporności wewnętrznej łącząc przyrządy według schematu przedstawionego na rys.2.

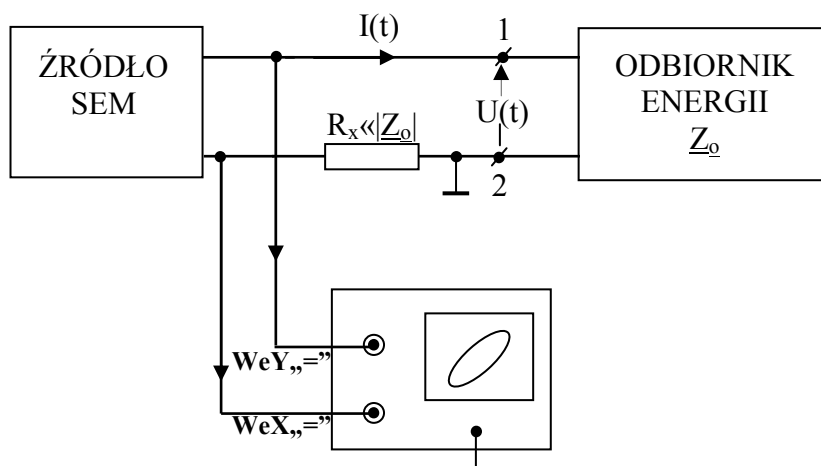


Rys.2

Układ taki służyć może do pomiaru mocy pozornej $P_p = U_s \cdot I_s$. Jeżeli w układzie tym zastąpimy oba mierniki oscyloskopem, to zamiast uśrednionej po czasie charakterystyki prądowo-napięciowej uzyskamy pełną informację łącznie z wartością kąta przesunięcia fazowego (rys.3).

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

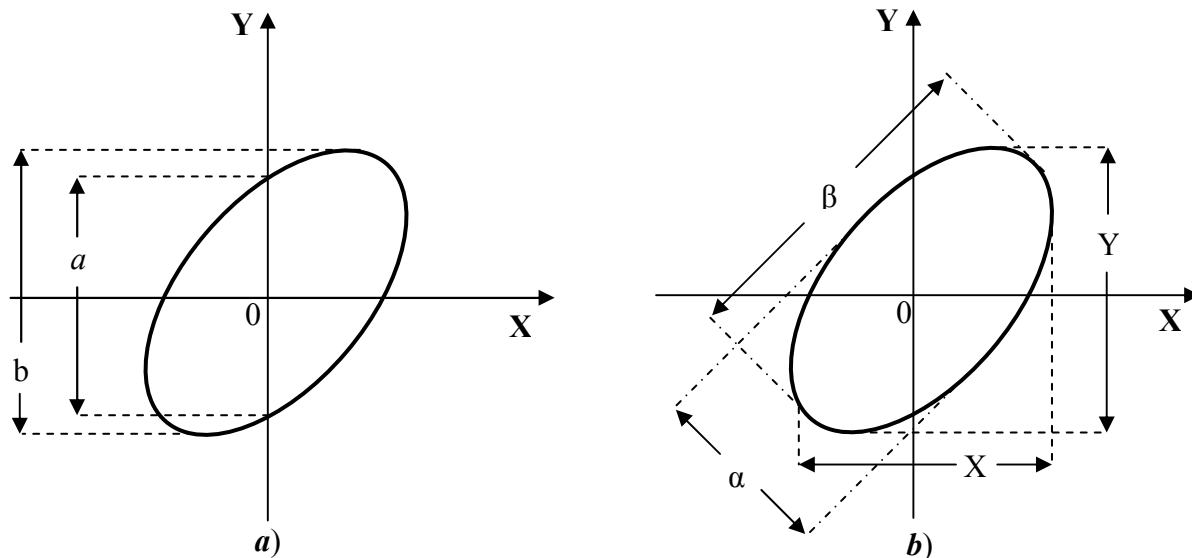
$$U(t) = U_0 \cos \omega t$$



Rys. 3 Zdejmowanie charakterystyki prądowo - napięciowej układu źródło - odbiornik za pomocą oscyloskopu XY.

Napięcie na zaciskach odbiornika jest wówczas mierzone bezpośrednio, natomiast natężenie prądu płynącego przez odbiornik znajdujemy znając wartości oporności R_x i spadek potencjału $U_x = R_x \cdot I$.

Ponieważ wiązka elektronów w lampie oscyloskopowej jest sterowana prostopadłymi do siebie polami elektrycznymi o takiej samej częstotliwości ale różnych kątach fazowych, to na ekranie powinniśmy w ogólnym przypadku uzyskać obraz elipsy, z której parametrów możemy obliczyć wartość kąta fazowego (rys.4 oraz przypis1).



$$\sin \varphi = \frac{a}{b} \quad \text{lub} \quad \sin \varphi = \frac{\alpha\beta}{XY}$$

Rys.4 Obliczanie kąta przesunięcia fazowego z parametrów obrazu elipsy.

Moc średnią obliczamy ze wzoru:

$$\bar{P} = \frac{X s_x Y s_y}{8R_x} \cos \varphi = \frac{X s_x Y s_y}{8R_x} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \quad (5)$$

gdzie X, Y, szerokość i wysokość obrazu elipsy [cm], s_x, s_y współczynnik odchylenia poziomego i pionowego oscyloskopu [V/cm], R_x – oporność opornika szeregowego [Ω].

VI. Pomiary

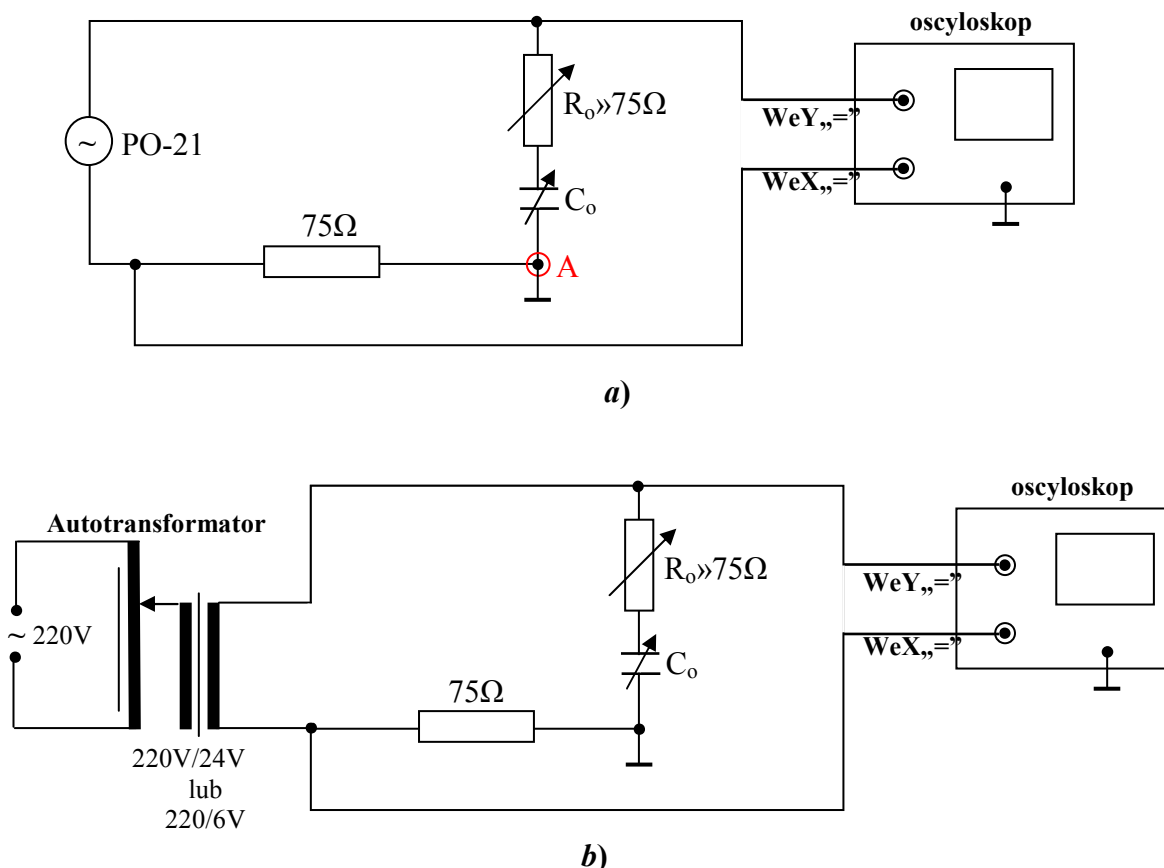
VI.1 Ocena dokładności metody wyznaczania kąta przesunięcia fazowego

1. Połączyć przyrządy według schematu przedstawionego na rys.5a (wariant A) lub na rys.5b (wariant B).
2. Wybrać wstępnie wartości $R_o = 1000 \Omega$ i $C_o = 1 \mu\text{F}$ oraz ustalić napięcie zasilania obwodu RC na 3 V przy częstotliwości (dla wersji z generatorem) 100 Hz.

Kąt przesunięcia fazowego φ prądu względem napięcia w obwodzie RC przedstawionym na rys.5 jest funkcją iloczynu wartości R i C tj. $\tau = R_o C_o$ (dla $R_o \gg 75 \Omega$) i częstotliwości kołowej (pulsacji) $\omega = 2\pi f$:

$$\text{tg } \varphi = \frac{1}{\omega R_o C_o} = \frac{1}{\omega \tau} = \frac{1}{2\pi f \tau} \quad (6)$$

gdzie f jest częstotliwością, a τ nosi nazwę stałej czasowej.



Rys.5 Pomiar przesunięcia fazowego.

Generator nie może mieć obudowy uziemionej ani wyzerowanej (tj. nie może być zasilany z gniazdka sieciowego z bolcem zerującym)¹. Obwód RC może być zasilany tylko takim napięciem, dla którego natężenie prądu płynącego w obwodzie nie przekracza wartości dopuszczalnej, podanej na obudowie opornika dekadowego.

1. Wykonać kilka – kilkanaście pomiarów kąta φ dla różnych wartości stałej czasu τ tak, aby wartość φ zmieniła się w przedziale od zera do $\pi/2$ ($0, \pi/2$). Dla układu R_0C_0 z rys.5 granice tego przedziału są niedomknięte z obu stron.
2. Wyniki przedstawić na jednym rysunku w postaci wykresu zależności $\varphi = f(\tau)$, obliczonej ze wzoru (6) i wykresu zależności doświadczalnej z uwzględnieniem błędów.

Gdy obwód RC zasilany jest transformatorem, to istnieje prawdopodobieństwo, że obraz elipsy obserwowany na ekranie oscyloskopu będzie zniekształcony. Zniekształcenia takie mogą być powodowane nasyceniem się rdzenia transformatora przy zbyt niskim napięciu w stosunku do napięcia zasilania. Zniekształcenie takie można wyeliminować zmieniając tak napięcie wyjściowe autotransformatora, aby nie dochodziło do nasycenia rdzenia.

¹ UWAGA!

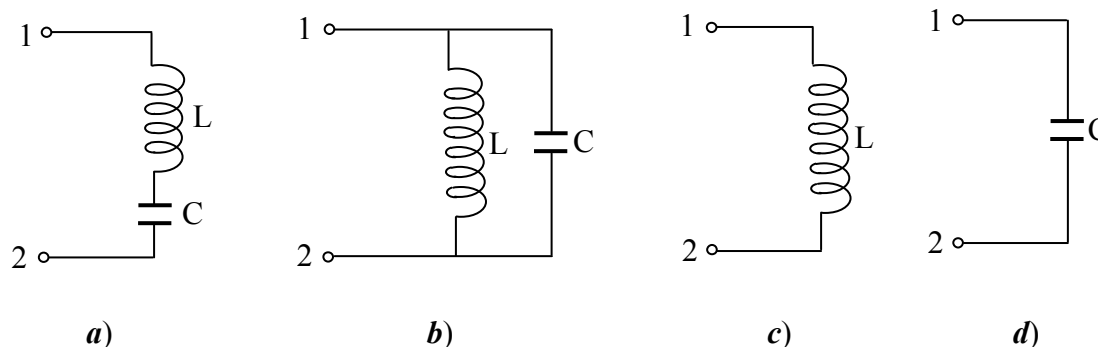
Najdogodniej jest zasiląć zarówno generator, jak i oscyloskop z gniazdek sieciowych pozbawionych bolca zerującego. Obudów obu przyrządów nie uziemiać, a punkt A (zaznaczony na rys.5a) połączyć z obudową (masą) oscyloskopu.

VI.2 Pomiar mocy średniej

Wariant A

Odbiornik energii zasilany z generatora mocy

- Połączyć przyrządy według schematu przedstawionego na rys.3, gdzie źródłem SEM jest generator mocy o nieziemionej i niezerowanej obudowie, a odbiornikiem energii jeden z poniżej przedstawionych układów (w przypadku uziemienia obudowy generatora dolne z gniazd wyjściowych generatora znajduje się na potencjale ziemi):



Rys.6

- Wyznaczyć średnią moc przekazywaną odbiornikowi w postaci szeregowo połączonej z pojemnością indukcyjności (rys.6a) przy napięciu wyjściowym generatora 7 V (zakres 7,75 V, 6 Ω) i częstotliwości 40, 43, 46, 50, 100, 150 i 200 Hz.
- Powtórzyć pomiary dla pozostałych odbiorników przy częstotliwościach 50, 100, 150 i 200 Hz.
- Wyniki przedstawić w postaci wykresu zależności mocy średniej, przesunięcia fazowego i modułu mocy zespolonej od częstotliwości.
- Oszacować błąd i przeprowadzić dyskusję wyników.

Wariant B

Odbiornik energii zasilany z transformatora

- Dla kilku wartości napięcia wyjściowego transformatora wykonać pomiary mocy średniej przekazywanej odbiornikom przedstawionym na rys.6.
- Wyniki przedstawić w postaci wykresów zależności mocy średniej, przesunięcia fazowego i modułu mocy zespolonej od napięcia.
- Przeprowadzić dyskusję wyników.

VI.3 Oszacowanie wartości L i C.

Na podstawie wyników pomiarów, opisanych w punkcie VI.2 oszacować wartości nieznaną indukcyjności L i nieznaną pojemności C, wykorzystując zmierzone wartości stosunku amplitudy spadku potencjału U_o na danym elemencie do amplitudy natężenia prądu I_o płynącego przez ten element (U_s, I_s - wartości skuteczne). Dla cewki mamy

$$\frac{U_s}{I_s} = \frac{U_o}{I_o} = \sqrt{R_L^2 + \omega^2 L^2} \quad (7)$$

gdzie R_L to oporność rzeczywista cewki.
Podobnie dla pojemności

$$\frac{U_s}{I_s} = \frac{U_o}{I_o} = \frac{1}{\omega C} \quad (8)$$

Wartość oporności R_L możemy wyznaczyć multimetrem cyfrowym bądź metodą amperomierza i woltomierza w obwodzie prądu stałego. Natężenie prądu I_o w obwodzie prądu zmiennego znajdujemy ze wzoru :

$$I_o = \frac{X_{s_x}}{2R_x} \quad (9)$$

gdzie X , s_x , R_x są zdefiniowane tak samo, jak we wzorze (5).

Należy nadmienić, że opisana powyżej metoda jest mniej dokładna w przeciwieństwie do metody mostkowej, opisanej w ćwiczeniu E-31. Stopień dokładności metody amperomierza i woltomierza możemy ocenić obliczając na podstawie znalezionych wartości L i C przewidywaną wartość stosunku U_o/I_o dla odbiorników z rys. (6c) i (6d), a następnie porównujemy ją z wartością doświadczalną.

PRZYPIS 1. Pomiar kąta przesunięcia fazowego

Jeśli do torów odchylenia poziomego i pionowego oscyloskopu doprowadzimy napięcia sinusoidalnie zmienne w czasie o takich samych częstościach, ale o różnych fazach, to na ekranie oscyloskopu powstanie obraz elipsy.

Kształt obrazu można odtworzyć graficznie metodą nanoszenia kolejnych punktów. Ruch wiązki elektronów w płaszczyźnie ekranu opisany jest zależnościami:

$$Y = Y_0 \cdot \cos \omega t \quad \text{i} \quad X = X_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

lub

$$Y = Y_0 \cdot \cos \omega t \quad \text{i} \quad X = X_0 \cdot (\cos \omega t \cdot \cos \varphi - \sin \omega t \cdot \sin \varphi)$$

Wartości argumentu $\omega t = \pi/2$ odpowiadają wartości $Y = 0$ i $X = -X_0 \cdot \sin \varphi$, które lokalizują punkt 1 na elipsie przedstawionej na rys.7. Odpowiednio warunek $\omega t = 3/2\pi$ daje $Y = 0$ i $X = +X_0 \cdot \sin \varphi$, co określa położenie punktu 7.

Jeżeli odległość między punktami 1 i 7 na elipsie oznaczmy przez a , to

$$a = 2 X_0 \cdot \sin \varphi$$

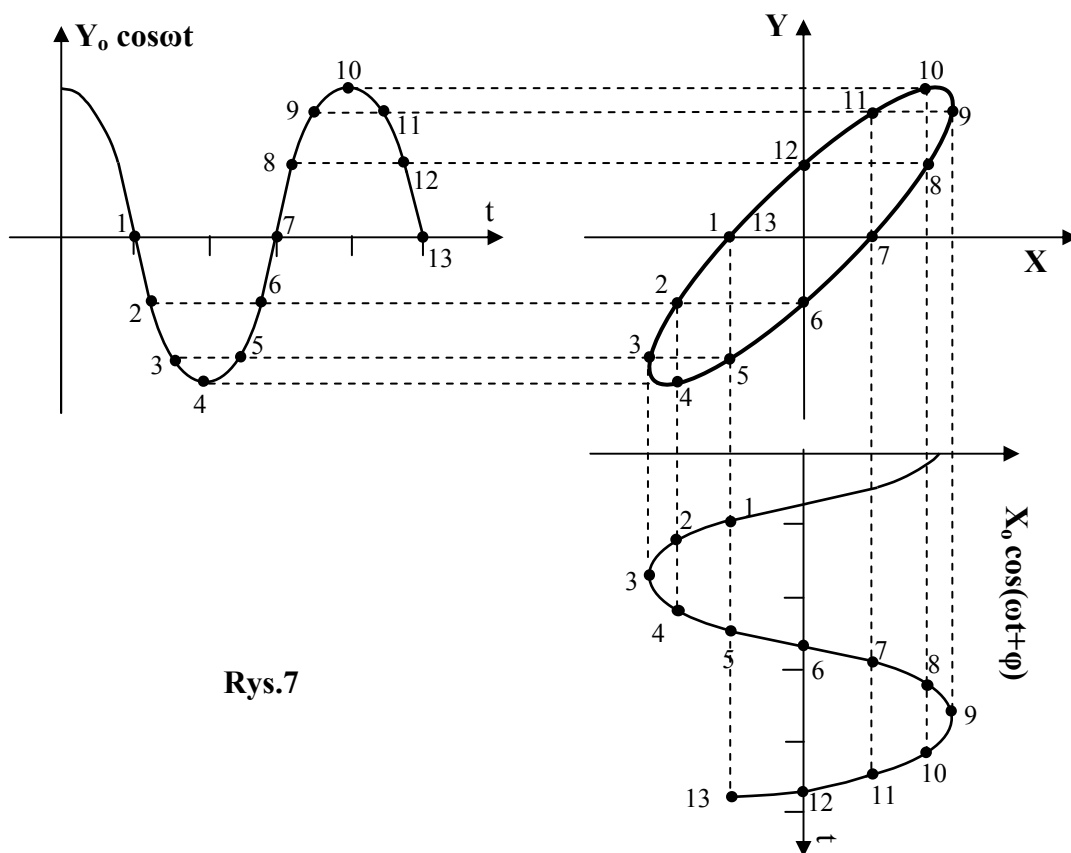
stąd

$$\sin \varphi = \frac{a}{b}$$

lub

$$\varphi = \arcsin \frac{a}{b}$$

gdzie a jest szerokością elipsy przy przecięciu z osią X , a b jest całkowitą szerokością elipsy równą $2X_0$.



Rys.7

Możemy również przyjąć napięcie doprowadzone do toru X za napięcie odniesienia, a wówczas a i b oznaczać będą odpowiednio wysokość elipsy przy przecięciu z osią Y i całkowitą wysokość elipsy równą $2Y_0$. (patrz rys. 4a tej instrukcji). Wartość przesunięcia fazowego φ jest identyczna.

PRZYPIS.2

Metoda wielkości zespolonych [2],[3]

Analiza obwodów prądu zmiennego wymaga operowania wielkościami typu $A = A_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ lub $A = A_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, gdzie wielkości A i A_0 oznaczać mogą, w zależności od potrzeby, wartości amplitudy napięcia lub prądu, a φ jest kątem przesunięcia fazowego. Wielkości te przy wykorzystaniu analizy harmonicznej mogą być stosowane nie tylko do opisu prądu przemiennego (sinusoidalnie zmiennego w czasie) ale i do opisu prądu dowolnie zmiennego w czasie. Metoda wielkości zespolonych polega na zastąpieniu wielkości rzeczywistych typu $A = A_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, wielkościami zespolonymi typu $\underline{A} = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$, wykonaniu obliczeń, uzyskaniu „wyniku zespolonego” i przejściu z powrotem do części rzeczywistej wyniku zespolonego jako szukanego „wyniku fizycznego”. Np. jeśli uzyskany wynik w postaci zespolonej ma postać

$$\underline{B} = B_0 e^{i(\omega t + \psi)}$$

to wynikiem fizycznym jest

$$B = \operatorname{Re} \underline{B} = B_0 \cos(\omega t + \psi), \quad (1')$$

zaś kąt fazowy i amplituda są określone wzorami

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{Im} \underline{B}(t=0)}{\operatorname{Re} \underline{B}(t=0)} \quad (2')$$

$$B_0 = |\underline{B}| = \sqrt{\underline{B} \underline{B}^*} \quad (3')$$

gdzie \underline{B}^* jest wielkością sprzężoną do \underline{B} .

Jeśli

$$\underline{B} = \operatorname{Re} \underline{B} + i \operatorname{Im} \underline{B} \quad \text{to} \quad \underline{B}^* = \operatorname{Re} \underline{B} - i \operatorname{Im} \underline{B}$$

Metoda wielkości zespolonych oparta jest na własnościach wzoru Eulera:

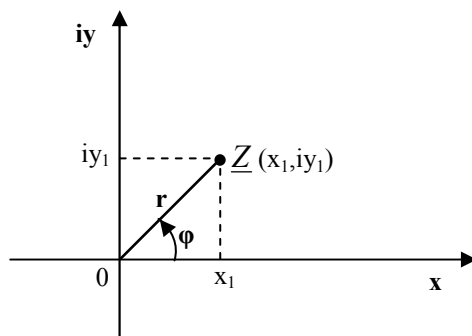
$$e^{iZ} = \cos Z + i \sin Z \quad (4')$$

który pozwala przejść od postaci trygonometrycznej wielkości zespolonej

$$\underline{Z} = x + i y = \sqrt{x^2 + y^2} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

do równoważnej postaci wykładniczej:

$$\underline{Z} = r e^{i\varphi}$$

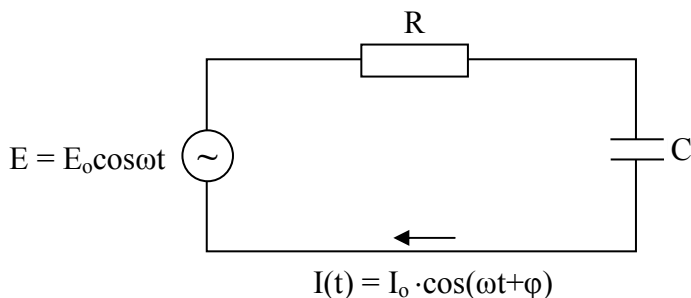


Rys.8

Zastosujmy tę metodę do analizy obwodu złożonego ze źródła SEM, opornika i kondensatora. Suma spadków potencjału na oporniku i kondensatorze równa jest wartości SEM:

$$E(t) = RI(t) + \frac{1}{C} Q(t) \quad (5')$$

gdzie $Q(t)$ jest ładunkiem zgromadzonym na okładkach kondensatora w chwili t .



Rys.9

Po zróżniczkowaniu względem czasu

$$\frac{dE(t)}{dt} = R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dQ(t)}{dt} = R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) \quad (6')$$

Zastępując $E(t) = E_0 \cos \omega t$ przez $\underline{E} = E_0 e^{i\omega t}$ a $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ przez $\underline{I} = I_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$ otrzymujemy po prostych przekształceniach

$$E_0 e^{i\omega t} = \underline{E} = R \cdot I_0 e^{i(\omega t + \varphi)} + \frac{1}{i\omega C} I_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = R \cdot \underline{I} + \frac{1}{i\omega C} \underline{I} \quad (7')$$

Oporność zespoloną – impedancję obwodu \underline{Z} definiujemy jako stosunek zespolonej SEM \underline{E} do zespolonego natężenia prądu \underline{I} , co w połączeniu z (7') daje:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{I}} = R + \frac{1}{i\omega C} = R - \frac{i}{\omega C}$$

Moduł oporności zespolonej (impedancji) obliczamy w sposób następujący:

$$Z = \sqrt{\underline{Z}\underline{Z}^*} = \sqrt{\left(R - \frac{i}{\omega C}\right)\left(R + \frac{i}{\omega C}\right)} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \quad (8')$$

Z drugiej strony zachodzi

$$|\underline{Z}| = \frac{E_0}{I_0} = \frac{E_s}{I_s}$$

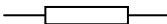

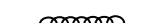
Dzieląc stronami (7') przez $e^{i\omega t}$ i wykonując elementarne przekształcenia otrzymujemy wzór na kąt przesunięcia fazowego prądu względem napięcia :

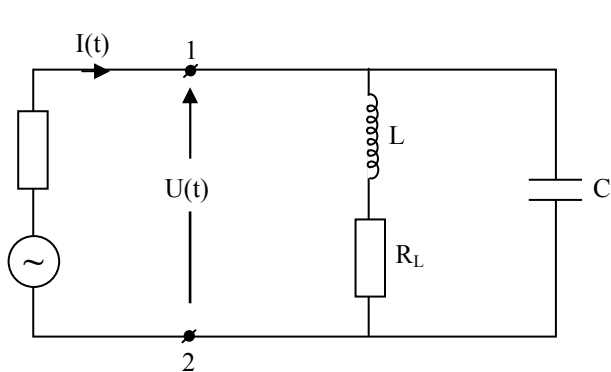
$$e^{i\varphi} = \frac{E_0}{I_0} \frac{1}{R - \frac{i}{\omega C}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \left(R + \frac{i}{\omega C}\right)$$

i na podstawie (2')

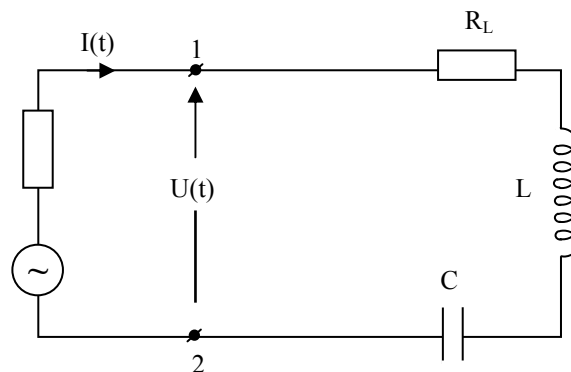
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{i}{\omega RC} \quad (9')$$

Analizując obwód równoległy wygodniej posłużyć się przewodnością zespoloną będącą odwrotnością impedancji: $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$. W metodzie wielkości zespolonych nie zachodzi konieczność konstruowania równania różniczkowego w celu znalezienia np. modułu impedancji. Punktem wyjściowym jest po prostu napisanie sumy impedancji lub przewodności poszczególnych elementów [2], [3].

Element	Impedancja \underline{Z}	Przewodność zespolona \underline{Y}
 R	R	1/R
 C	$\frac{-i}{\omega C}$	$i\omega C$
 L	$i\omega L$	$\frac{-i}{\omega L}$



Rys.10



Rys.11

Przewodność zespoloną \underline{Y} obwodu równoległego (rys.10) przedstawić możemy jako sumę przewodności zespolonych obu równoległych gałęzi:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R_L + i\omega C} + i\omega C$$

natomiast impedancja

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + i\left(\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2}\right)}$$

co daje wartość modułu impedancji

$$\underline{Z} = \sqrt{\underline{Z}\underline{Z}^*} = \sqrt{\frac{R_L^2 + \omega^2 L^2}{(1 - \omega^2 LC) + (\omega R_L C)^2}}$$

Dla obwodu szeregowego (rys.11) możemy napisać:

$$\underline{Z} = R_L + i\omega L - \frac{i}{\omega C}$$

a zatem

$$\underline{Z} = \sqrt{\underline{Z}\underline{Z}^*} = \sqrt{\left[R_L + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] \cdot \left[R_L - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]} = \sqrt{R_L^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$