

Drgania relaksacyjne (pomiar pojemności)

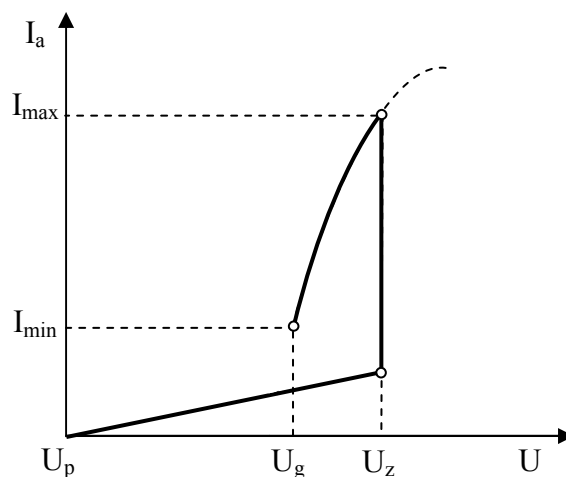
- I. Cel ćwiczenia:** zapoznanie z działaniem oraz własnościami najprostszej dwuelektrodowej lampy gazowej – neonówki
- II. Przyrządy:** płytki pomiarowa, kondensator dekadowy, multimetr cyfrowy, zasilacz prądu stałego, oscyloskop.
- III. Literatura:** [1] J. L. Kacperski, „I Pracownia fizyczna”;
 [2] H. Hofmokl, A. Zawadzki, „Laboratorium fizyczne”;
 [3] J. L. Kacperski, „Opracowanie danych pomiarowych”;
 [4] T. Rewaja (praca zbiorowa), Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki na politechnice;
 [5] H. Szydłowski, „Pracownia fizyczna”.

IV. Wstęp

W bańkę lampy wypełnionej gazem szlachetnym (np. neonem) lub ich mieszaninami, czasami z dodatkiem par metali (np. rtęci) pod ciśnieniem $1\div 300$ hPa wtopione są dwie elektrody. Jest to tzw. lampa gazowana dwuelektrodowa. W gazie znajdującym się w lampie jest zawsze pewna liczba jonów dodatnich i elektronów powstałych pod wpływem jonizacji wywołanej przez ciała promieniotwórcze (znajdujące się niewielkiej ilości w otoczeniu) oraz pod wpływem promieniowania kosmicznego. Jednak liczba par jonów w lampie jest w przybliżeniu stała na skutek występowania rekombinacji czyli oddziaływania elektronów z jonami i powstaniu w konsekwencji neutralnych atomów.

W przypadku przyłożenia do elektrod lampy napięcia, którego wartość nie przekracza pewnej wartości progowej gaz zachowuje się jak izolator. Prąd płynący na skutek ruchu jonów i elektronów do elektrod ma przy takim napięciu znikome natężenie. Po przyłożeniu do elektrod napięcia powyżej napięcia progowego, następuje jonizacja obojętnych atomów gazu podczas zderzania się z nimi elektronów przyspieszanych w polu elektrycznym między elektrodami. Jony dodatnie i elektrony podążają w kierunku odpowiednio katody i anody z prędkościami zależnymi od natężenia pola elektrycznego oraz rodzaju i ciśnienia gazu wypełniającego lampę. Należy nadmienić, że prędkość jonów dodatnich jest znacznie mniejsza niż prędkość elektronów, a wynika to stąd, że jony dodatnie są cięższe i mniej ruchliwe od elektronów. Te własności jonów dodatnich powodują, że wokół katody wytwarza się „chmura” jonów dodatnich, co powoduje duży spadek potencjału w pobliżu katody tzw. spadek katodowy między tą „chmurą” a katodą. W konsekwencji elektrony otrzymują energie potrzebne do jonizacji już przy katodzie. Elektrony wybite podążają w kierunku anody z prędkościami, które pozwalają im także na wzbudzenie atomów gazu, co powoduje zjawisko jarzenia się gazu. Natomiast dodatnie jony przyspieszane w polu elektrycznym podążają do katody i bombardują jej powierzchnię. W wyniku tego procesu powierzchnia katody emituje elektrony, co powoduje „lawinowy” wynoszący kilka rzędów wielkości wzrost natężenia prądu. Wybijanie przez jony dodatnie kolejnych elektronów zapoczątkowuje ciągle nowe procesy lawinowe co sprawia, że przepływ prądu o dużej gęstości (nazywany wyładowaniem) odbywa się nawet wtedy, gdy zostanie usunięte źródło jonizacji. Mówimy wówczas, że mamy do czynienia z wyładowaniem samoistnym. Wyładowanie samoistne można przerwać przez obniżenie napięcia na elektrodach lampy. Napięcie, przy którym wyładowanie niesamoistne przechodzi w wyładowanie samoistne nazywa się napięciem zapłonu, natomiast napięcie, przy którym następuje powrót do wyładowania niesamoistnego nazywa się napięciem gaśnięcia. Napięcie gaśnięcia w

przypadku lampy gazowej może być o 20 – 30V niższe od napięcia zapłonu. Przyczyną tego jest obecność wystarczającej liczby jonów powstałych w czasie wyładowania, nawet jeśli obniży się napięcie poniżej napięcia zapłonu. Przy napięciu gaśnięcia ustaje proces wyładowania oraz towarzyszące mu jarzenie gazu i lampa gazowa przestaje przewodzić prąd. Poniższy rysunek pokazuje charakterystykę takiej lampy



Rys.1 Charakterystyka prądowo – napięciowa lampy jarzeniowej

Od napięcia $U = U_p$ do napięcia zapłonu U_z rozciąga się obszar wyładowania ciemnego. Powyżej napięcia U_z następuje wyładowanie jarzeniowe. W tym obszarze spadek napięcia na lampie jarzeniowej jest prawie niezależny od natężenia przepływającego prądu, a wzrost natężenia prądu powoduje zwiększenie powierzchni katody objętej jarzeniem się gazu. Dalsze zwiększanie napięcia powoduje wejście w obszar wyładowania łukowego, co grozi zniszczeniem lampy. Zmniejszając prąd płynący przez lampę do wartości I_{min} powodujemy obniżenie napięcia na elektrodach do wartości napięcia gaśnięcia U_g , niższego od napięcia zapłonu U_z . Różnica $U_z - U_g$ maleje w miarę wzrostu częstości zapalania neonówki na skutek skończonej prędkości zachodzenia rekombinacji.

V. Drgania relaksacyjne

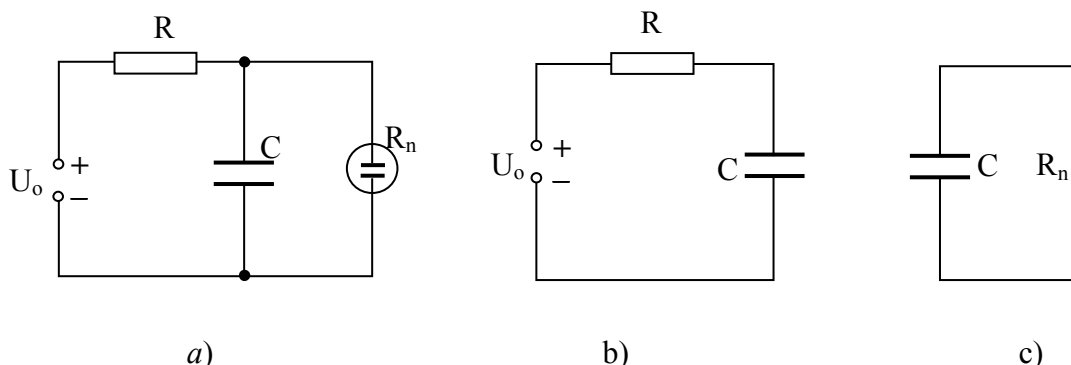
Relaksacja jest to powrót układu do stanu równowagi termodynamicznej. Co za tym idzie drganiami relaksacyjnymi nazywamy drgania (mechaniczne, cieplne, elektryczne) układu spowodowane przejściem od stanu początkowego do jakiegoś innego stanu, po czym następuje powrót do stanu pierwotnego. Wszystkie stany pośrednie pomiędzy stanem początkowym i stanem końcowym nie mogą samodzielnie spowodować powrotu do stanu początkowego. Jeśli temu układowi zostanie dostarczona energia z zewnątrz w sposób ciągły, to wówczas mamy okresowe drgania relaksacyjne. Zmniejszenie dopływu energii spowoduje przerwanie drgań relaksacyjnych.

Właściwość samoistnego wyładowania jarzeniowego na skutek różnicy między napięciem zapłonu i napięciem gaśnięcia daje możliwość wytworzenia drgań relaksacyjnych w lampie jarzeniowej (neonowej) co będzie przedmiotem badań naszego doświadczenia.

VI. Układ pomiarowy

Lampka neonowa włączona jest w obwód elektryczny (rys.2a), w którym pojemność C połączona jest przez opór R z siłą elektromotoryczną U_0 . Wraz ze wzrostem napięcia między okładkami kondensatora wzrasta również napięcie między elektrodami lampy neonowej. Do czasu kiedy napięcie jest mniejsze od napięcia zapłonu U_z , neonówka ma bardzo duży opór (nie będzie

praktycznie przez nią przepływał prąd), dlatego też nie bierze udziału w ładowaniu kondensatora C. W związku z tym możemy rozważyć uproszczony schemat pomijający neonówkę z rys.2b.



Rys.2 a) Schemat włączenia lampy neonowej do obwodu, b) schemat uproszczony dla $U < U_z$ (ładowanie kondensatora przez opór R), c) schemat uproszczony dla $U > U_z$ (rozładowanie kondensatora przez opór neonówki R_n).

Stosując dla tego przypadku (rys.2b) prawa Kirchoffa możemy napisać

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = U_0 \quad (1)$$

gdzie Q – ładunek zebrany na okładkach kondensatora.

Różniczkując relację $Q = C U$, otrzymamy $dQ = C dU$, a po wstawieniu do równania (1) dostajemy równanie różniczkowe liniowe niejednorodne:

$$RC \frac{dU}{dt} + U = U_0, \quad (2)$$

które rozwiązuje się metodą uzmienniania stałej (patrz **Uzupełnienie**).

Wykorzystując warunek początkowy $U = 0$ dla $t = 0$, otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$$U = U_0 (1 - e^{-t/RC}) \quad (3)$$

(rozwiązanie równania zamieszczono w **Uzupełnieniu**).

Iloczyn RC ma wymiar czasu i nazwany jest stałą czasową obwodu.

Kiedy napięcie U na okładkach kondensatora (a więc i na elektrodach neonówki) osiągnie wartość U_z , oporność wewnętrzna neonówki maleje bardzo szybko o kilka rzędów wielkości i jest $R_n \ll R$. Można więc przyjąć, że kondensator jest izolowany od źródła prądu i rozładowuje się przez nieduży opór R_n . Uproszczony schemat obwodu odpowiadający tej sytuacji pokazuje rys 2c. Dla tego schematu korzystając z praw Kirchoffa można napisać równanie

$$R_n \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (4)$$

$$R_n C \frac{dU}{dt} + U = 0 \quad (5)$$

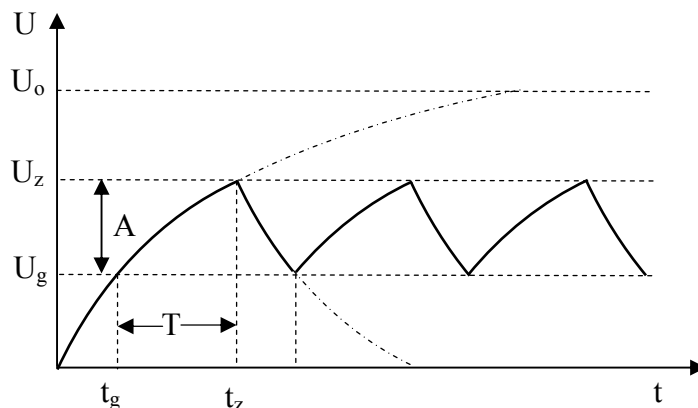
Rozwiązanie równania (5) zamieszczone jest w **Uzupełnieniu**.

Wykorzystując warunek początkowy $U = U_z$ dla $t = 0$, otrzymamy rozwiązanie

$$U = U_z \cdot e^{-t/RC} \quad (6)$$

Prąd rozładowujący kondensator płynie do momentu, gdy na okładkach kondensatora i elektrodach neonówki napięcie spadnie do napięcia gaśnięcia U_g . Opór R jest rzędu kilku $M\Omega$, co po-

woduje, że prąd płynący przez niego jest za mały, aby podtrzymać jarzenie. Po osiągnięciu tego napięcia neonówka przestaje przewodzić, a kondensator podobnie jak na początku znów zaczyna się ładować i napięcie między jego okładkami wzrasta do U_z , po czym rozładowuje się jak poprzednio przez neonówkę do wartości U_g itd.



Rys.3 Przebieg napięcia w funkcji czasu na neonówce.

Rys.3 przedstawia wykres drgań relaksacyjnych. Wykres ten przypomina kształtem zęby piły, dlatego też często nazwa ta jest używana do scharakteryzowania drgań takiego typu.

W naszych rozważaniach pomijamy czas opadania impulsu tzn. czas rozładowania kondensatora, w którym napięcie na nim spadnie od wartości U_z do wartości U_g . Czas ten jest znacznie mniejszy od czasu ładowania, dlatego zostaje pominięty (bo $R_n \ll R$).

Czasy t_z i t_g odpowiadające zapłonowi i gaśnięciu neonówki otrzymujemy z warunków

$$U_g = U_0 (1 - e^{-t_g/RC}) \quad \Rightarrow \quad t_g = -RC \ln \left(1 - \frac{U_g}{U_0} \right) \quad (7)$$

$$U_z = U_0 (1 - e^{-t_z/RC}) \quad \Rightarrow \quad t_z = -RC \ln \left(1 - \frac{U_z}{U_0} \right) \quad (8)$$

Uwzględniając wyżej wymienione rozważania mamy:

$$T = t_z - t_g = RC \ln \frac{U_0 - U_g}{U_0 - U_z} \quad (9)$$

Przy ustalonych U_0 , U_g , U_z okres T jest proporcjonalny do stałej czasowej RC . Wzór (9) otrzymano, zaniedbując skończony czas zachodzenia w gazie lampy neonowej takich procesów jak rozwój wyładowania samoistnego, rekombinacja itp.. Uwzględnienie tych efektów w przypadku neonówki nie jest zresztą w ogóle możliwe, bowiem pole elektryczne jest w niej niejednorodne natomiast jego natężenie oraz dodatkowo skład i ciśnienie gazu nie są dokładnie znane. Dlatego wprowadzimy najprostsze poprawki przyjmując, że napięcie gaśnięcia $U_g = \text{constans}$ (dla danego egzemplarza neonówki), a napięcie zapłonu U_z zależne od szybkości zmian napięcia na elektrodach, może zmieniać się w pewnych granicach. Oznaczmy przez t_{op} czas opóźnienia wpływający pomiędzy osiągnięciem „statycznego” napięcia zapłonu U_z (napięcie zapłonu przy bardzo powolnym wzroście napięcia na anodzie), a momentem rozpoczęcia się wyładowania samoistnego. Przy bardzo powolnym wzroście napięcia na anodzie jego wartość prawie się nie zmienia w

ciągu krótkiego czasu t_{op} (wartość najczęściej wynosi kilkadziesiąt μs), ale jeśli wzrost napięcia następuje szybko (przy małej stałej czasowej), wówczas napięcie na anodzie może w czasie t_{op} przekroczyć znacznie statystyczne napięcie zapłonu osiągając wartość „dynamiczną” U_{zd} .

Przez analogię do (8) możemy napisać

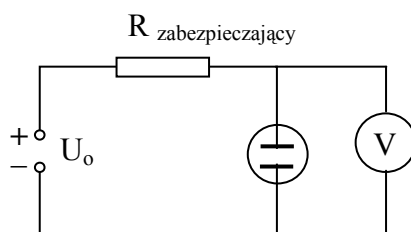
$$t_{zd} = -RC \ln\left(1 - \frac{U_{zd}}{U_o}\right) \quad (10)$$

i w konsekwencji okres drgań wyniesie

$$T = RC \ln\left(\frac{U_o - U_g}{U_o - U_{zd}}\right) \quad (11)$$

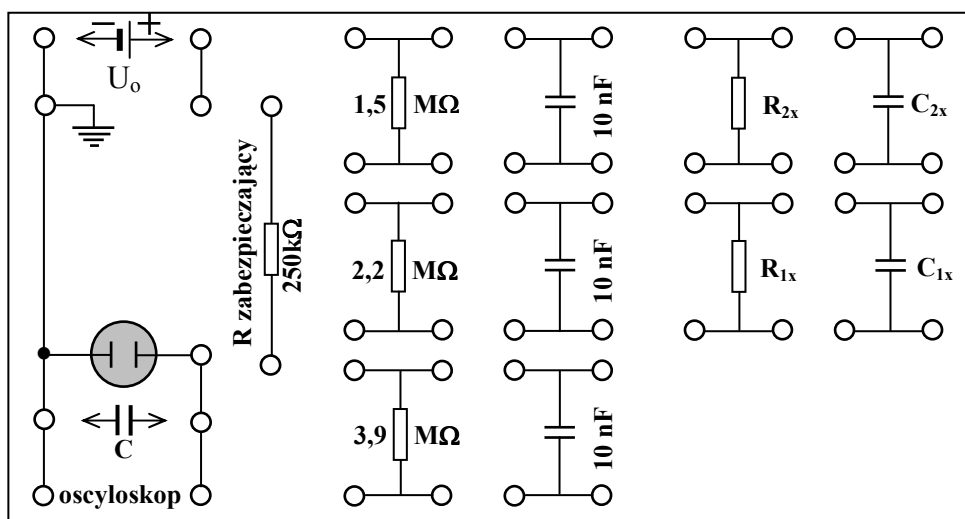
VII. Pomiary

a) Pomiar statycznego napięcia zapłonu U_z i napięcia gaśnięcia U_g .



Rys.4 Schemat układu do pomiaru napięcia zapłonu i gaśnięcia neonówki.

1. Zbudować układ według schematu z rys.4. Wykorzystać do tego celu elementy rozmieszczone na płytce montażowej (rys.5). Opór zabezpieczający chroni neonówkę przed zniszczeniem w wyniku przepływu prądu o zbyt dużym natężeniu. Równoległe do neonówki włączyć wol-



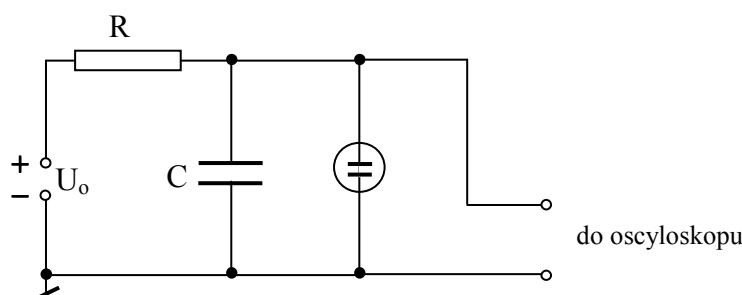
Rys.5 Płytkę montażową i schemat rozmieszczenia wykorzystywanych elementów elektrycznych.

Symbol \bigcirc oznacza gniazdko radiowe, liniami ciągłymi oznaczono wewnętrzne połączenia elektryczne elementów.

tomierz cyfrowy w celu pomiaru napięcia zapłonu neonówki (napięcie zmieniamy odpowiednimi pokrętkami zasilacza). Zwiększać stopniowo napięcie na wyjściu zasilacza aż do momentu zapalenia się neonówki. Wartość napięcia zapłonu w samym momencie zapłonu wskazuje woltomierz, po czym napięcie to momentalnie spada do wartości tzw. „napięcia pracy” neonówki. Wartość wskazywana wówczas przez woltomierz jest zależna od spadku napięcia na oporniku zabezpieczającym oraz od oporu wewnętrznego neonówki R_n .

- Po orientacyjnym określeniu wartości statycznego napięcia zapłonu U_z , obniżyć napięcie zasilania aż do chwili zgaśnięcia neonówki i odczytać U_g z woltomierza.
- Po tych wstępnych czynnościach ponownie zmierzyć kilka razy U_z i U_g . Tym razem wolno zmieniać napięcie zasilania przy zbliżaniu się do wyznaczonych wcześniej wartości. Zwrócić szczególną uwagę na pomiar napięcia gaśnięcia, ponieważ bezpośrednio przed pełnym zgaśnięciem neonówka jarzy się prawie niezauważalnie.

b) Pomiar okresu drgań.



Rys.6 Schemat do badania drgań relaksacyjnych

Zbudować układ pomiarowy zgodnie ze schematem z rys.6. Potrzebne elementy znajdują się na płytce montażowej – (rys.5). Jako pojemności C można użyć kondensatora dekadowego i nie korzystać z umieszczonych na płytce kondensatorów o pojemności 10 nF (kondensatory te należałoby łączyć szeregowo lub równolegle, aby zwiększyć liczbę punktów pomiarowych). Wartość napięcia zasilającego lampkę neonową ustawić na $U_0 = 140V$.

- Dla danego oporu R i różnych wartości pojemności C (z przedziału 0 – 30 nF) zmierzyć oscyloskopem okres T drgań relaksacyjnych (zaniedbując czas opadania impulsu. Wykonać trzy serie pomiarów okresów drgań dla trzech wartości oporów R .

Wyniki zapisać w Tabeli 1. C_{1x} , C_{2x} oznaczają dwie pojemności o nieznannej wartości (umieszczone na płytce montażowej), dla których również należy dokonać pomiarów okresu T ; l_x – długość pozioma impulsu w cm na ekranie oscyloskopu, s_x – współczynnik odchylenia poziomego oscyloskopu w ms/cm.

Tabela 1

Lp	C [nF]	$R_1 = 1,5M\Omega$			$R_2 = 2,2 M\Omega$			$R_3 = 3,9 M\Omega$		
		Okres T			Okres T			Okres T		
		l_x [cm]	$s_x \left[\frac{ms}{cm} \right]$	$T = l_x \cdot s_x$ [ms]	l_x [cm]	$T = l_x \cdot s_x$ [ms]	$s_x \left[\frac{ms}{cm} \right]$	l_x [cm]	$s_x \left[\frac{ms}{cm} \right]$	$T = l_x \cdot s_x$ [ms]
1										
2										
3										
⋮										
	C_{1x}									
	C_{2x}									

2. Dla ustalonej pojemności C i dla różnych wartości oporów R dokonać pomiarów okresu drgań T . Wykorzystać w tym celu załączone trzy znane opory oraz kombinacje ich połączeń szeregowych i równoległych. Dokonać pomiarów okresu również dla nieznanymi wartościami oporów R_{1x} i R_{2x} . Wyniki zapisać w Tabeli 3.

Tabela 2

Lp	R [MΩ]	C ₁ = 5nF			C ₂ = 15nF			C ₃ = 25nF		
		Okres T			Okres T			Okres T		
		I _x [cm]	s _x $\left[\frac{ms}{cm} \right]$	T = I _x ·s _x [ms]	I _x [cm]	T = I _x s _x [ms]	s _x $\left[\frac{ms}{cm} \right]$	I _x [cm]	s _x $\left[\frac{ms}{cm} \right]$	T = I _x s _x [ms]
1										
2										
3										
⋮										
	R _{1x}									
	R _{2x}									

c) Badanie zależności okresu drgań od napięcia zasilania.

Dla wybranej wartości oporu R i wybranej wartości pojemności C , zmieniając napięcie zasilania U_0 od 100 do 200V skokiem co 10V zmierzyć na ekranie oscyloskopu okres T i amplitudę A drgań.

Tabela 3

Lp	R =		C =	
	Napięcie U ₀ [V]	Okres T [ms]	Amplituda A [V]	U _{zd} = U _g + A [V]
1	100			
2	110			
⋮	⋮			

VIII. Opracowanie wyników.

1. Obliczenie statycznego napięcia zapłonu U_z i napięcia gaśnięcia U_g.

1.1. Obliczyć średnią wartość statycznego napięcia zapłonu U_z i napięcia gaśnięcia U_g.

1.2. Obliczyć błąd ΔU_z oraz ΔU_g, wykorzystując wzór na średni błąd kwadratowy średniej arytmetycznej

$$\Delta U_z = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (U_z - U_{z\text{śrd}})^2}{n(n-1)}}, \quad \Delta U_g = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (U_g - U_{g\text{śrd}})^2}{n(n-1)}}$$

gdzie n jest liczbą pomiarów wielkości mierzonej.

2. Zależność okresu drgań T od C i R

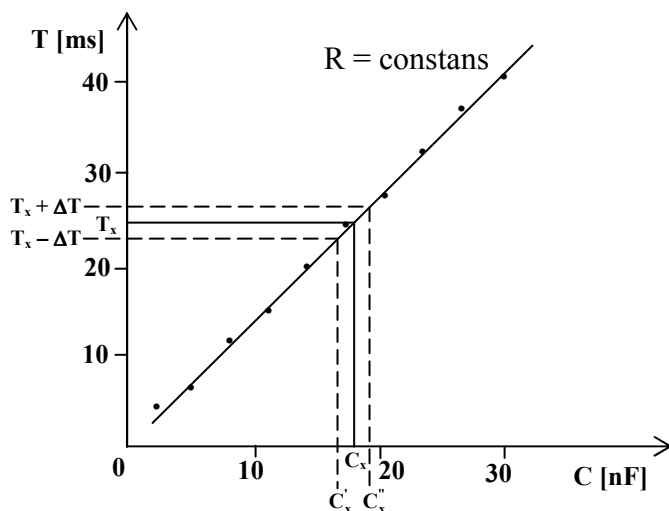
2.1 Wykorzystując dane z tabeli 1, przedstawić na jednym wykresie zależność okresu T drgań relaksacyjnych w funkcji pojemności C dla ustalonej wartości oporu R (dla trzech różnych wartości oporów R). Otrzymamy w ten sposób tzw. krzywe kalibracyjne.

2.2 Wykorzystując dane z tabeli 2 wykreślić zależność okresu T drgań relaksacyjnych w funkcji oporu R dla ustalonej wartości pojemności C (dla trzech różnych wartości pojemności C).

2.3 Mając wykresy $T = f(C)$ oraz $T = f(R)$, znaleźć nieznanymi wartościami pojemności C_x i oporu R_x w oparciu o znajomość odpowiednich okresów drgań T (patrz rys.7).

Jeśli nieznaną pojemność C_x i nieznaną wartość oporu R_x wyznaczano z trzech krzywych kalibracyjnych, to należy obliczyć średnie wartości \bar{C}_x i \bar{R}_x .

Wzór (9) przewiduje, że krzywe kalibracyjne będą liniami prostymi, wzór (11) przewiduje krzywe wypukłe. Porównaj otrzymane zależności doświadczalne z tymi przewidywaniami.



Rys.7 Przypadek jednej krzywej kalibracyjnej dla $R = \text{const}$. Wyznaczanie nieznannej pojemności C_x oraz niepewności ΔC_x z wykresu.

Dla jednej krzywej kalibracyjnej $T = f(C)$, najlepiej dla $R = 3,9 \text{ M}\Omega$ zaznaczyć na wykresie niepewności pomiarowe ΔT i ΔC dla punktów doświadczalnych. Wykorzystać do tego celu informacje zawarte w punkcie IX instrukcji (**Ocena dokładności**).

Niepewność ΔC_x nieznannej pojemności wyznaczyć ze wzoru:

$$\Delta C_x = \frac{C''_x - C'_x}{2}$$

gdzie C'_x , C''_x pojemności wyznaczone z wykresu odpowiadające okresom $T_x - \Delta T$, $T_x + \Delta T$. W podobny sposób określić niepewność ΔR_x nieznanego oporu R_x przy wykorzystaniu krzywej kalibracyjnej $T = f(R)$ dla $C = 25 \text{ nF}$.

3. Zależność okresu T od napięcia zasilania U_o .

Wzór (11) podzielmy stronami przez RC i wprowadźmy liniową skalę funkcyjną:

$$y = \frac{T}{RC}, \quad x = \ln \frac{U_o - U_g}{U_o - U_{zd}}$$

Wykorzystując wyniki z Tabeli 3 sporządzić wykres zależności $y = y(x)$. Zgodnie ze wzorem (11) punkty powinny ułożyć się wzdłuż linii prostej $y = x$

IX. Ocena dokładności ΔT , ΔC , ΔR , ΔA , ΔU

Na dokładność wyznaczenia okresu drgań T mają wpływ dwa czynniki:

- dokładność odczytu długości poziomego odcinka na ekranie oscyloskopu – jest ona rzędu $\Delta l_x = \pm 2 \text{ mm}$,
- dokładność skalowania oscyloskopu w postaci maksymalnej niepewności względnej współczynnika odchylenia $\frac{\Delta s_x}{s_x} = 0,03$,

Zatem niepewność pomiaru okresu ΔT wynosi:

$$\Delta T = \pm T \left(\frac{\Delta l_x}{l_x} + \frac{\Delta s_x}{s_x} \right).$$

Podobnie na dokładność wyznaczenia amplitudy A wpływają dwa czynniki:

- dokładność odczytu długości pionowego odcinka na ekranie oscyloskopu – jest ona rzędu $\Delta l_y = \pm 2\text{mm}$,
- dokładność skalowania oscyloskopu w postaci maksymalnej niepewności względnej współczynnika odchylenia $\frac{\Delta s_y}{s_y} = 0,03$,

Niepewność pomiaru amplitudy ΔA wynosi zatem:

$$\Delta A = \pm A \left(\frac{\Delta l_y}{l_y} + \frac{\Delta s_y}{s_y} \right)$$

Względną niepewność $\Delta C/C$ nastawienia pojemności na kondensatorze dekadowym przyjmując równą $0,05$, czyli $\Delta C = 0,05C$.

Względną niepewność $\Delta R/R$ określenia oporności przyjmując równą $0,05$, czyli $\Delta R = 0,05R$.

Niepewności pomiaru napięcia ΔU_z , ΔU_g , ΔU_o zależą od użytego typu woltomierza oraz od zakresu na jakim dokonywano pomiaru napięcia. Należy je obliczyć korzystając z informacji uzyskanych od prowadzącego zajęcia.

Niepewność pomiaru dynamicznego napięcia zapłonu: $\Delta U_{zd} = \Delta U_g + \Delta A$.

Uzupełnienie.

Znajdźmy rozwiązanie równania (2) ze strony 3 tej instrukcji:

$$RC \frac{dU}{dt} + U = U_0 \quad (12)$$

Jest to równanie różniczkowe liniowe niejednorodne pierwszego rzędu. Aby znaleźć rozwiązanie tego równania, należy najpierw znaleźć rozwiązanie równania dla $U_0 = 0$.

W przypadku, gdy $U_0 = 0$ równanie nosi nazwę równania liniowego jednorodnego i ma postać

$$RC \frac{dU}{dt} + U = 0 \quad (13)$$

Rozwiązujemy je metodą rozdzielania zmiennych.

Równanie (13) po przekształceniach przyjmie postać

$$\frac{dU}{U} = -\frac{1}{RC} dt$$

Całkując stronami ostatnie równanie

$$\int \frac{dU}{U} = -\frac{1}{RC} \int dt$$

otrzymujemy

$$\ln|U| = -\frac{t}{RC} + K$$

gdzie K jest pewną stałą.

Korzystając z własności funkcji logarytmicznej możemy napisać

$$|U| = e^K \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$U = \pm e^K \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = B \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (14)$$

gdzie stała $B = \pm e^K$ może przybierać dowolną wartość dodatnią lub ujemną.

Wyrażenie (14) jest całką ogólną czyli rozwiązaniem równania jednorodnego (13).

W przypadku równania (5) dla warunku początkowego $t = 0$, napięcie $U = U_z$. Wyznacza to jednoznacznie stałą $B = U_z$ w wyrażeniu (14), dając całkę szczególną. Stąd wynika zależność da-

na wzorem (6) czyli $U = U_z \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$.

Całka ogólna (14) nie jest jednak rozwiązaniem równania (12). Następnym etapem poszukiwania właściwej funkcji spełniającej to równanie jest zastąpienie stałej B funkcją zmiennej t , czyli $B(t)$. Powyższa metoda znajdowania rozwiązania równania różniczkowego liniowego niejednorodnego nazywa się metodą uzmienniania stałej.

Napięcie U będzie wówczas funkcją

$$U = B(t) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (15)$$

która jest całką równania (12).

Aby znaleźć postać funkcji $B(t)$ różniczkujemy funkcję $U(t)$ daną wzorem(15):

$$\frac{dU}{dt} = B'(t) e^{-\frac{t}{RC}} + \left(-\frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{RC}\right) B(t) \quad (16)$$

i podstawiamy wyrażenia na U z równania (15) oraz $\frac{dU}{dt}$ z równania (16) do równania (12).

Otrzymamy

$$RC \left[B'(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + \left(-\frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} \right) B(t) \right] + B(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = U_0$$

Po przekształceniu

$$B'(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + \left(-\frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} \right) B(t) + \frac{1}{RC} B(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_0}{RC}$$

Po uproszczeniu mamy

$$B'(t) e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_0}{RC}$$

$$B'(t) = \frac{U_0}{RC} e^{\frac{t}{RC}}$$

Po scałkowaniu mamy

$$B(t) = \frac{U_0}{RC} \int e^{\frac{t}{RC}} dt$$

Wprowadźmy nową zmienną: $u = \frac{t}{RC}$. Wówczas mamy również $du = \frac{dt}{RC}$ i otrzymamy

$$B(t) = U_0 \int e^u du = U_0 e^{\frac{t}{RC}} + K$$

Po wstawieniu ostatniego wyrażenia do wzoru (15) dostaniemy

$$U = (U_0 e^{\frac{t}{RC}} + K) e^{-\frac{t}{RC}}$$

Jest to całka ogólna (rozwiązanie) równania (12) dla każdej wartości stałej K .

Wykorzystując warunek początkowy, że dla $t = 0$ napięcie $U = 0$ otrzymamy stałą K

$$0 = U_0 + K \quad \Rightarrow \quad K = -U_0$$

Ostatecznie

$$U = (U_0 e^{\frac{t}{RC}} - U_0) e^{-\frac{t}{RC}}$$

czyli

$$U = U_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Otrzymaliśmy zależność daną wzorem (3).