

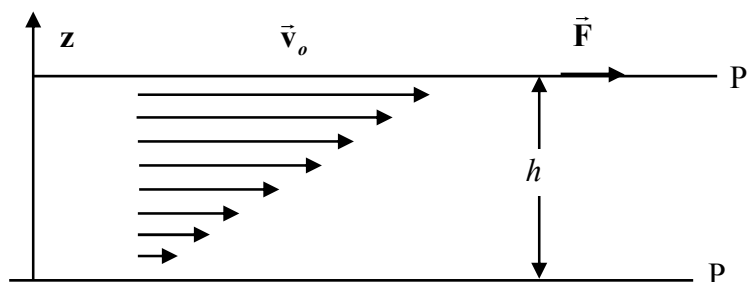
Pomiar współczynnika lepkości wody. Badanie funkcji wykładniczej.

- I. Cel ćwiczenia:** wyznaczenie współczynnika lepkości wody η w oparciu o wykres zależności wysokości słupa wody w cylindrze od czasu wypływu rurką kapilarną.
- II. Przyrządy:** cylinder ze skalą, kapilara, stoper, suwmiarka.
- III. Literatura:**
1. J. L. Kacperski, I Pracownia fizyczna.
 2. M. Kaczmarczyk, Instrukcja pracowniana: Pomiar współczynnika lepkości wody i wyznaczanie krytycznej liczby Reynoldsa metodą badania szybkości przepływu wody rurką kapilarną.

IV. Wstęp

IV.1. Charakterystyka laminarnego i turbulentnego przepływu cieczy

Oddziaływania między cząsteczkami cieczy (których natura jest w zasadzie elektryczna) powodują, że w każdej cieczy rzeczywistej, w odróżnieniu od jej modelowego odpowiednika – cieczy idealnej – występuje tarcie wewnętrzne, zwane też lepkością. Lepkość charakteryzuje opór cieczy przeciw płynięciu pod działaniem sił zewnętrznych. Wpływ lepkości w cieczach ujawnia się w całej ich objętości. Rozważmy warstwę cieczy o grubości h , zawartą między dwiema płaskimi i równoległymi płytkami np. P i P' (o powierzchni S każda), z których P spoczywa, a P' przemieszcza się z prędkością v_0 pod wpływem stycznej siły zewnętrznej \vec{F} (rys.1). Tarcie wewnętrzne powoduje powstanie między dwiema sąsiednimi warstwami cieczy, poruszającymi się z niejednakową prędkością, sił stycznych do powierzchni tych warstw i skierowanych odwrotnie do ich prędkości względnej. Prędkość v_0 płytki P', jest stała, o ile siła tarcia wewnętrznego cieczy T (tzw. opór lepki), występująca między drobinami cieczy, a w szczególności w warstwie przylegającej do płytki P', równoważy siłę zewnętrzną: $\vec{F} = -\vec{T}$.



Rys.1 Rozkład wektora prędkości cieczy rzeczywistej (lepkiej) zawartej między dwiema równoległymi płytkami cieczy P i P', z których płytka P spoczywa.

Cząsteczki cieczy przylegające do płaszczyzny P' przesuują się wraz z nią z prędkością v_0 , natomiast cząsteczki cieczy przylegające do płytki P (spoczywającej) mają prędkość zerową. W tej sytuacji, i pod warunkiem, że odkształcenie postaciowe cieczy jest jednorodne, w kierunku prostopadłym do powierzchni płytek (np. w kierunku osi z), w polu przekroju poprzecznego strugi ustala się przepływ cieczy o różnych lokalnych prędkościach, zmieniających się liniowo w przedziale od $|\vec{v}_0| = 0$ (dla $z = 0$) do $|\vec{v}_0| = v_0$ (dla $z = h$).

Stan taki opisuje się gradientem prędkości o jednej nie znikającej wartości w kierunku osi z : $dv/dz = v_0/h$. W przypadku, gdy odkształcenie postaciowe cieczy, pod wpływem stycznej siły zewnętrznej F jest jednorodne, współczynnik lepkości cieczy η , będący miarą oporu lepkiego cieczy, wylicza się ze wzoru Newtona :

$$\eta = \frac{F}{S \cdot \frac{dv}{dz}} \quad (1)$$

W układzie SI jednostką lepkości jest $1 Pa \cdot s$ (paskalosekunda). We wzorze (1) wyrażenie $\tau = F/S$ oznacza działające na płytę naprężenie styczne. Takie naprężenie działa też na każdą równoległą do płytki warstwę cieczy, która porusza się z prędkością różną od prędkości warstwy sąsiedniej. Wobec tego, że cząsteczki płynącej cieczy rzeczywistej (lepkiej), w sąsiednich warstwach, poruszają się z różnymi prędkościami, przepływ jej wygodnie jest scharakteryzować podając średnią prędkość ruchu. Przy małych średnich prędkościach, tory cząsteczek cieczy są liniami gładkimi, linie prądu są równoległe i nie mieszają się. Taki przepływ nazywa się regularnym, warstwowym lub laminarnym. Ze wzrostem średniej prędkości przepływu tory cząsteczek cieczy nabierają charakteru nieuporządkowanego, burzliwego. W cieczy tworzą się zawirowania i występują nieregularności przepływu strug cieczy. Taki ruch cieczy nazywany jest turbulentnym.

Gdy przepływ cieczy jest laminarny, współczynnik lepkości η ma charakter stałej fizycznej cieczy. Nie zależy on od grubości warstwy ośrodka lepkiego ani od rozmiarów płytek. Nie zależy też od naprężenia stycznego.

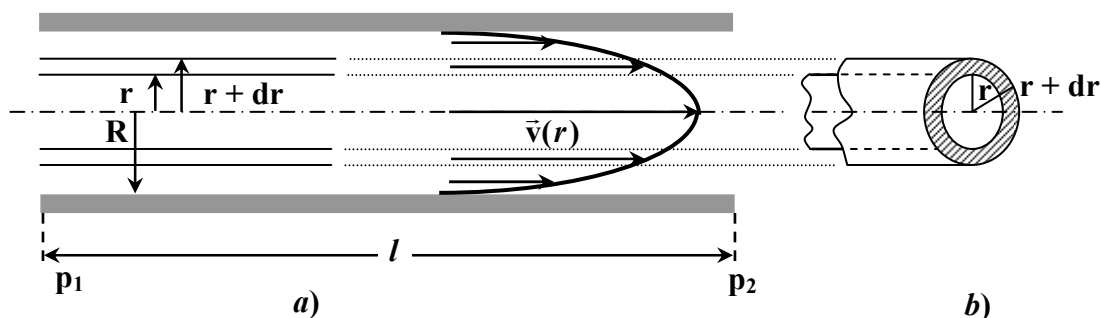
Ze wzrostem średniej prędkości przepływu i w warunkach jego złożonej geometrii, może nastąpić zmiana charakteru przepływu z laminarnego w turbulentny.

W takiej sytuacji pojęcie oporu lepkiego należy zastąpić pojęciem oporu turbulentnego.

IV.2. Ciecz rzeczywista przepływająca przez kapilarę

Podczas laminarnego wypływu cieczy rzeczywistej przez kapilarę (o długości l, której promień wewnętrzny przekroju kołowego jest R), spowodowanego różnicą ciśnień na jej końcach ($p_1 - p_2$), tory cząsteczek cieczy są prostoliniowe i równoległe do osi rurki. Jednakże prędkości ich, w punktach wzdłuż średnicy kapilary (pokrywającej się np. z osią r), są zróżnicowane co do wartości. Największą prędkość mają cząsteczki na osi kapilary ($r = 0$), natomiast drobiny przylegające do ścianek wewnętrznych rurki ($r = R$) mają prędkość równą zero. Symetria zagadnienia pozwala wyodrębnić w płynie współśrodkowe cylindry o promieniu r (dla $0 < r < R$) i grubości dr na tyle małej, że prędkość drobin cieczy w zakresie wybranego cylindra jest stała i wynosi $v(r)$ (rysunek 2).

Jeżeli przepływ jest laminarny, to jedynie ruch cieplny cząsteczek powoduje wymianę pędu zachodzącą poprzez ścianki tak pomyślanych walców. Ten ruch cieplny ma tendencję do wyrównywania prędkości cząsteczek z sąsiednich obszarów. Ilościowo proces ten opisuje się siłą tarcia wewnętrznego T, proporcjonalną do powierzchni bocznej walców oraz do gradientu prędkości:



Rys.2 Przepływ cieczy przez rurkę cylindryczną: **a)** rozkład prędkości przepływu cieczy lepkiej w rurce o promieniu R i długości l pod wpływem różnicy ciśnień $p_1 - p_2$, **b)** warstwa cieczy ograniczona powierzchniami cylindrycznymi o promieniach r i $r + dr$.

$$T = -\eta \cdot S \frac{dv(r)}{dr} \quad (4)$$

gdzie η jest współczynnikiem lepkości.

Rozpatrzmy walcowy element cieczy o długości l i promieniu r (rys.2), poruszający się wzdłuż osi rurki. Załóżmy, że ciśnienie wzdłuż promienia jest stałe (zaniedbujemy ciężar cieczy). W warunkach przepływu laminarnego, siła tarcia T i siła zewnętrzna F wynikająca (w tym przypadku) z różnicy ciśnień na końcach kapilary ($F = \pi r^2 (p_1 - p_2)$), równoważą się:

$$\vec{T} + \vec{F} = 0 \quad \text{lub inaczej} \quad T = F \quad (5)$$

Wykorzystując zależność (4) ostatni wzór można zapisać w postaci:

$$-\eta 2\pi r l \frac{dv(r)}{dr} = \pi r^2 (p_1 - p_2) \quad (6)$$

gdzie $2\pi r l = S$ jest powierzchnią boczną rozpatrywanego walca.

Całkując (6) znajdziemy prędkość przepływu:

$$v = -\frac{r^2 (p_1 - p_2)}{4l\eta} + C \quad (7)$$

Wartość stałej C określa się z warunku, wielokrotnie potwierdzonego doświadczalnie, że cienka warstwa cieczy przylega do ścianek rurki, tzn. $v = 0$ dla $r = R$. Ze wzoru (7) otrzymujemy wówczas:

$$C = \frac{R^2 (p_1 - p_2)}{4l\eta} \quad (8)$$

oraz:

$$v = \frac{(R^2 - r^2)(p_1 - p_2)}{4l\eta} \quad (9)$$

Tak więc prędkość przepływu zmienia się parabolicznie wzdłuż promienia.

Rozpatrzmy teraz obszar rurki ograniczony dwoma walcami o promieniach r i $r + dr$ (rys. 2b). W jednostce czasu przepływa przez powierzchnię dS ciecz o objętości:

$$dV = v dS = v 2\pi r dr = 2\pi r v dr \quad (10)$$

Po wykorzystaniu wzoru (9) otrzymamy:

$$dV = \frac{\pi r(R^2 - r^2)(p_1 - p_2)}{2l\eta} dr \quad (11)$$

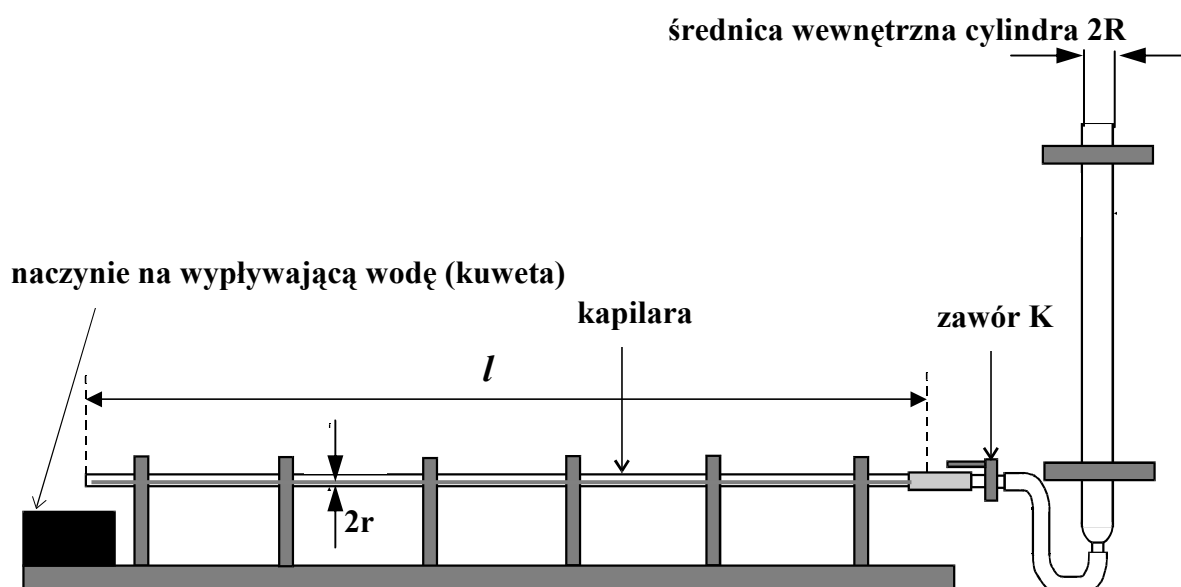
Scałkowanie ostatniego wyrażenia w granicach od 0 do R pozwoli znaleźć objętość cieczy przepływającej w jednostce czasu przez cały przekrój rurki:

$$V = \int_0^R \frac{\pi r(R^2 - r^2)(p_1 - p_2)}{2l\eta} dr = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8l\eta} \quad (12)$$

Jest to wzór Hagen-Poiseuille'a.

IV.3. Zależność wysokości słupa cieczy od czasu w pionowym cylindrze przy wypływie tej cieczy rurką kapilarną

Rozpatrzmy układ przedstawiony na rysunku 3. Jest to pionowy cylinder szklany, z którego badana ciecz wypływa przez długą, umieszczoną poziomo kapilare.



Rys. 3. Układ do pomiaru współczynnika lepkości wody.

Jeżeli V jest objętością cieczy wypływającej w jednostce czasu (patrz wzór (12)), to w czasie dt wypłynie ciecz o objętości Vdt . Spowoduje to obniżenie poziomu cieczy w cylindrze o dh . Jeżeli przekrój cylindra oznaczymy przez A , wówczas:

$$Vdt = -Adh \quad (13)$$

Znak minus pojawił się dlatego, że wysokość h maleje w czasie pomiaru. Różnica ciśnień na końcach kapilary równa jest ciśnieniu hydrostatycznemu cieczy:

$$p_1 - p_2 = \rho gh \quad (14)$$

gdzie ρ oznacza gęstość cieczy, g – przyspieszenie ziemskie.

Z równań (12) – (14) otrzymamy:

$$-A \frac{dh}{dt} = \frac{\pi \rho g h r^4}{8l\eta} \quad (15)$$

gdzie r jest promieniem wewnętrznego przekroju poprzecznego kapilary (we wzorze (12) jest to R)

W czasie trwania pomiaru zmienia się tylko wysokość słupa cieczy h , pozostałe parametry pozostają stałe:

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda h \quad (16)$$

gdzie:

$$\lambda = \frac{\pi \rho g r^4}{8lA\eta} = \text{const.} \quad (17)$$

Po scałkowaniu wzoru (16) otrzymamy:

$$h = h_0 \exp(-\lambda t) \quad (18)$$

gdzie h_0 oznacza wysokość słupa cieczy w chwili rozpoczęcia pomiarów.

V. Zastosowanie

Wzór (18), opisujący zmianę wysokości słupa cieczy z upływem czasu jest przykładem zależności wykładniczej, bardzo często spotykanej w fizyce. Wymieńmy kilka przykładów zastosowania funkcji wykładniczej: rozpad substancji radioaktywnej, pochłanianie promieniowania, rozładowanie kondensatora, stygnięcie, tłumienie drgań.

Rozpatrzmy przypadek, gdy czas t we wzorze (18) osiąga wartość $t = T$, dla której iloczyn $\lambda T = 1$. Wówczas $h = h_0/e$, tzn. początkowa wysokość zmalała e razy. W przypadku rozpadu substancji promieniotwórczej odpowiada to e -krotnemu zmniejszeniu się liczby jąder emitujących promieniowanie. Czas $T = \lambda^{-1}$ nazywamy średnim czasem życia (λ nazywa się stałą rozpadu). Często korzysta się także z pojęcia okresu połowicznego rozpadu, tzn. czasu, w którym rozpadowi ulega połowa jąder próbki. W naszej analogii z wypływem cieczy odpowiada to czasowi, w którym lustro cieczy opadło z wysokości h_0 do $h_0/2$.

VI. Metoda pomiaru

Wzór (18) posłuży nam do wyznaczenia wartości współczynnika lepkości wody. po zlogarytmowaniu otrzymamy:

$$\ln h = \ln h_0 - \lambda t \quad (19)$$

W układzie współrzędnych $(t, \ln h)$ wykresem zależności (19) jest linia prosta o nachyleniu λ . Znając λ możemy ze wzoru (17) wyznaczyć współczynnik lepkości:

$$\eta = \frac{\pi \rho g r^4}{8lA\lambda} \quad (20)$$

VII. Pomiary

Zmierzyć długość kapilary l , średnicę wewnętrzną szklanego cylindra $2R$ i zanotować promień wewnętrzny kapilary r . Napełnić cylinder wodą destylowaną, a następnie otworzyć zawór K. Stoper włączyć w chwili, gdy lustro wody osiągnie poziom wybrany jako h_0 i notować czasy osiągnięcia wysokości $h_0 - 0,05$ m, $h_0 - 0,10$ m itd.

VIII. Opracowanie

1. Na podstawie wyników pomiarów wykreślić zależność wysokości słupa wody w cylindrze od czasu: $h = h(t)$ w układzie współrzędnych liniowych.
2. Wykreślić tę samą zależność w układzie współrzędnych $(t, \ln h)$.
3. Dla układu współrzędnych $(t, \ln h)$ oczekiwaną zależnością jest prosta postaci $y = ax + b$ (patrz zależność (19)). Metodą najmniejszych kwadratów lub graficznie wyznaczyć współczynnik nachylenia a prostej i znaleźć wartość λ ($\lambda = -a$).
4. Na podstawie zależności (20) wyznaczyć współczynnik η lepkości wody.
5. Wyznaczyć niepewność wyznaczenia współczynnika lepkości wody $\Delta\eta$:

$$\Delta\eta = \pm \sqrt{\left(\frac{4\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2}$$

gdzie $\Delta A = 2\pi R\Delta R$. R i ΔR oznaczają odpowiednio promień cylindra pionowego i niepewność, z jakim został wyznaczony. (Niepewności $\Delta\rho$ i Δg pominać, ponieważ wartość gęstości wody i przyspieszenia ziemskiego można odczytać z tablic z wystarczającą dokładnością).