

WYZNACZANIE STOSUNKU CIEPŁA WŁAŚCIWEGO c_p/c_v DLA POWIETRZA

- I. Cel ćwiczenia:** zapoznanie z teorią kinetyczno-molekularną gazu doskonałego, poznanie przemian gazu doskonałego: izotermicznej, adiabatycznej, izochorycznej, pomiar stosunku c_p/c_v dla powietrza
- II. Przyrządy:** naczynie szklane umieszczone w osłonie izolacyjnej, manometr cieczowy, pompka.
- III. Literatura:** [1] H. Hofmokr, A. Zawadzki – Laboratorium fizyczne
[2] J. L. Kacperski - I pracownia fizyczna
[3] J. Orear – Fizyka (t. I).

IV. Wprowadzenie

Gaz jest zbiorem olbrzymiej liczby bardzo małych cząsteczek. Średnie odległości między nimi są znaczne w porównaniu z ich rozmiarami. Podczas swojego ruchu cząsteczki w zasadzie nie oddziałują na siebie poza krótkim czasem zderzenia. Zderzenia między cząsteczkami traktuje się jako doskonale sprężyste. Są to podstawowe założenia teorii kinetyczno-molekularnej gazów.

Energia kinetyczna cząstek na ogół składa się z energii kinetycznej ruchu postępowego, energii kinetycznej ruchu obrotowego oraz drgań cząstek.

Przyjmuje się, że żaden rodzaj ruchu nie jest uprzywilejowany oraz, że średnio na każdy tzw. stopień swobody cząsteczki przypada jednakowa ilość energii.

Liczba stopni swobody ciała to najmniejsza liczba niezależnych współrzędnych określających położenie ciała w przestrzeni. Wprowadzenie liczby stopni swobody pozwala na obliczenie energii przypadającej na wszystkie rodzaje ruchu cząsteczki.

W dokładnych rozważaniach bierze się pod uwagę translacyjne stopnie swobody (związane z ruchem postępowym), rotacyjne stopnie swobody (związane z ruchem obrotowym), oscylacyjne stopnie swobody. Przy czym te ostatnie często pomija się, ponieważ oscylacje są znaczące dopiero przy wysokich temperaturach oraz przy gazach wieloatomowych.

W teorii kinetyczno-molekularnej gazów jednoatomowy gaz to nieoddziałujące ze sobą atomy traktowane jak punkty materialne (bez wymiarów) i poruszające się tylko ruchem postępowym bez obrotu. Energia kinetyczna cząsteczki jednoatomowej jest zdefiniowana przez trzy parametry, którymi są trzy składowe prędkości ruchu postępowego. Posiada więc trzy translacyjne stopnie swobody.

Korzystając z teorii kinetyczno-molekularnej gazów oraz równania stanu gazu wykazano, że średnia energia kinetyczna ruchu postępowego takiej cząsteczki (posiadającej trzy stopnie swobody) jest proporcjonalna do temperatury gazu T i wynosi

$$E_{k,p} = \frac{3}{2} kT,$$

Wobec tego, na jeden stopień swobody cząsteczki przypada energia:

$$E_{k,p(1)} = \frac{1}{2} kT \quad (1)$$

lub
$$E_{k,p(1)} = \frac{1}{2} RT \quad (\text{dla wszystkich cząsteczek w molu gazu})$$

gdzie k - stała Boltzmanna, R – stała gazowa

Wzór (1) stanowi **zasadę ekwipartycji energii Maxwella**.

Cząsteczka dwuatomowa to układ dwu atomów sztywno ze sobą związanych, który oprócz ruchu postępowego posiada ruch obrotowy dookoła dwu osi prostopadłych względem jego osi głównej (łączyjącej oba atomy). Energia kinetyczna tej cząsteczki zależy od trzech translacyjnych stopni swobody wynikających z ruchu postępowego oraz z dwóch rotacyjnych stopni swobody wynikających ze składowych prędkości ruchu obrotowego wzdłuż dwu osi obrotu. Taka cząsteczka posiada więc 5 stopni swobody.

W przypadku trójatomowych i wieloatomowych cząsteczek przyjmuje się model bryły sztywnej, a co za tym idzie przypisuje się sześć stopni swobody (trzy translacyjne stopnie swobody i trzy rotacyjne stopnie swobody). Tutaj niekiedy trzeba uwzględnić jeszcze dodatkowo oscylacyjne stopnie swobody wynikające z ruchu drgającego.

Zakładając, że gaz składa się z jednakowych cząsteczek, z których każda posiada „ i ” stopni swobody mamy, że na każdą cząsteczkę (na wszystkie rodzaje jej ruchu) przypada energia kinetyczna

$$E_k = \frac{i}{2} kT \quad \text{lub} \quad E_k = \frac{i}{2} RT \quad (\text{dla wszystkich cząsteczek w 1 molu gazu}).$$

W przypadku kiedy temperatura gazu podnosi się, wzrasta energia kinetyczna ruchu postępowego cząsteczek.

Podwyższenie temperatury mola gazu o 1 K w warunkach, gdy gaz nie zmienia swojej objętości wymaga dostarczenia mu energii $C_V = \frac{i}{2} R$.

C_V nazywamy **ciepłem molowym przy stałej objętości**.

Ilość ciepła niezbędna do podwyższenia temperatury jednego mola gazu o 1 K ogrzewanego pod stałym ciśnieniem nosi nazwę **ciepła molowego przy stałym ciśnieniu** C_p .

Dostarczona z zewnątrz energia, liczbowo równa C_p , zwiększa energię kinetyczną cząsteczek mola gazu o $C_V = \frac{i}{2} R$ i jednocześnie jej kosztem mol gazu wykonuje również pracę przeciwko siłom zewnętrznym. Stąd $C_p > C_V$.

Można wykazać [3], że pomiędzy C_p i C_V zachodzi relacja

$$C_p = C_V + R \quad (2)$$

Związek (2) jest nazywany związkiem Mayera. Uwzględniając wyrażenie na C_V dostaniemy

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R. \quad (3)$$

Stosunek $\frac{C_p}{C_V} = \chi$ jest dla danego gazu wielkością stałą, zależy on tylko od liczby stopni swobody cząsteczek, z których składa się gaz. Wykorzystując wzór Mayera otrzymamy

$$\chi = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{2}{i}$$

Między ciepłem molowym i ciepłem właściwym zachodzi związek

$$C = \mu c \quad (4)$$

gdzie μ oznacza masę 1 mola danej substancji, c – ciepło właściwe

Podwyższenie temperatury jednostki masy gazu o 1K wymaga dostarczenie energii liczbowo równej c .

Rozróżniamy ciepło właściwe przy stałej objętości c_V i ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu c_p .

Korzystając z definicji ciepła molowego C_V oraz wzoru (4) mamy

$$c_v = \frac{i}{2\mu} R \quad \text{oraz} \quad c_p = c_v + \frac{R}{\mu}.$$

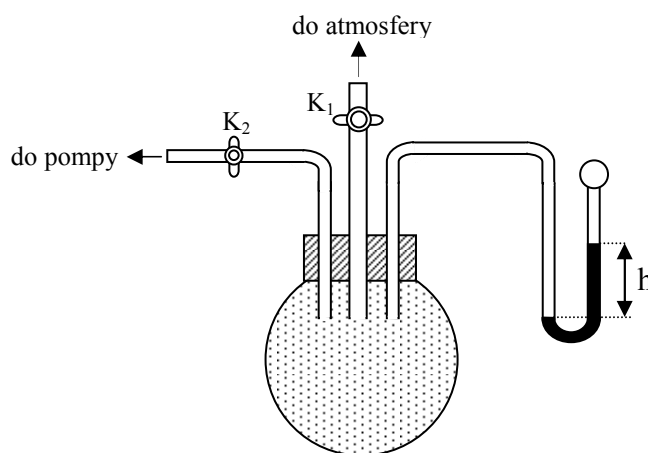
Natomiast

$$\chi = \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_v}$$

Dla gazów jednoatomowych $\chi = 1,67$, dla dwuatomowych $\chi = 1,41$, dla trójatomowych $\chi = 1,33$.

V. Aparatura pomiarowa

Układ pomiarowy stanowi naczynie szklane z manometrem umieszczone w osłonie izolacyjnej. Pojemność naczynia wynosi ok. 20 litrów. Manometr napełniony jest naftą i zakończony na końcu kulistym zbiornikiem zapobiegającym rozlaniu się ciecży przy nieumiejętnym pompowaniu. Kranem K_1 wypuszczamy powietrze, kran K_2 łączy naczynie szklane z pompką



Rys.1 Układ do pomiaru stosunku C_p/C_V

VI. Zasada pomiaru

Na początku w naczyniu z otwartymi kranami i połączonym z manometrem znajduje się gaz o ciśnieniu atmosferycznym p_0 , temperaturze T_0 równej temperaturze otoczenia. Po zamknięciu kranów gaz ten poddawany jest trzem przemianom.

- 1 Przemiana – izotermiczna:** Zmieniamy ciśnienie gazu na $p_1 = p_0 + h_1$ za pomocą pompki, pompując powoli, aby temperatura gazu nie wzrosła na skutek tarcia tłoka w pompce (dla pewności należy odczekać chwilę, aby temperatura wyrównała się z temperaturą otoczenia T_0).

Stan **I** gazu po przemianie charakteryzuje się ciśnieniem p_1 , objętością właściwą V_1 i temperaturą T_0 .

Objętością właściwą nazywamy odwrotność gęstości (czyli jest to wielkość wyrażająca liczbowo objętość, jaką zajmuje jednostka masy gazu w danych warunkach).

- 2 Przemiana – adiabatyczna:** Otwieramy kran K_1 na 1÷2 s (następuje kontakt z otaczającym powietrzem). Gaz rozprężając się wykonuje pracę, a co za tym idzie temperatura jego obniża się do T_1 .

Stan **II** gazu po przemianie charakteryzuje się ciśnieniem p_0 , objętością właściwą V_0 i temperaturą $T_1 < T_0$.

- 3 Przemiana – izochoryczna:** Po zamknięciu kranu K_1 gaz ogrzewa się do temperatury otoczenia T_0 , ciśnienie jego wzrasta do ciśnienia $p_2 = p_0 + h_2$ przy czym $h_2 < h_1$, ponieważ $V_1 < V_0$.

Stan III gazu jest scharakteryzowany przez ciśnienie $p_2 = p_0 + h_2$, objętość właściwą V_0 i temperaturę T_0 .

Należy pamiętać, że V_1 i V_0 w tym ujęciu to objętości właściwe, czyli objętości jednostki masy powietrza w danych warunkach ciśnienia i temperatury

	Ciśnienie	Objętość właściwa	Temperatura
Stan I	$p_1 = p_0 + h_1$	V_1	T_0
Stan II	p_0	V_0	$T_1 < T_0$
Stan III	$p_2 = p_0 + h_2$	V_0	T_0

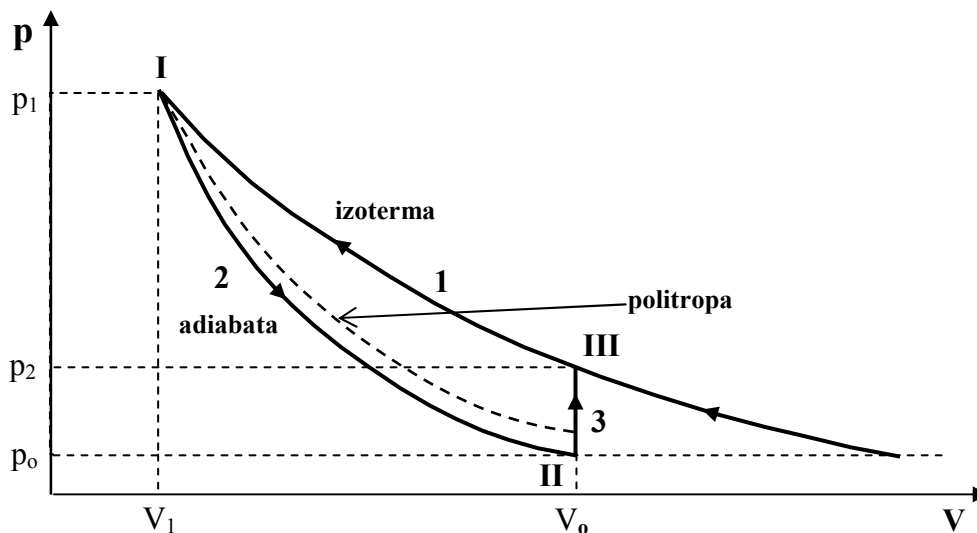
Przechodząc ze stanu I do II gaz ulega przemianie adiabatycznej co powoduje, że stosujemy tutaj wzór Poissona

$$p_1 V_1^\chi = p_0 V_0^\chi \quad (5)$$

Niedoskonała izolacja ścianek naczynia powoduje systematyczne zniżenie wyniku. Nie zachodzi bowiem przemiana adiabatyczna, lecz przemiana opisana równaniem $pV^n = \text{const}$ gdzie $n < \chi$. Krzywa opisująca tę przemianę nosi nazwę politropy (patrz rys. 2).

W stanie III gaz posiada tę samą temperaturę co w stanie I. W takim razie związek między parametrami gazu możemy uzyskać stosując prawo Boyle'a - Mariott'a:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_0 \quad (6)$$



Rys.2 Przebieg doświadczenia we współrzędnych p i V

Z równań (5) i (6) otrzymamy

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^\chi \quad (7)$$

oraz

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_0}{V_1} \quad (8)$$

Podstawiając (8) do (7) mamy

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^\chi \quad (9)$$

Ponieważ $p_1 = p_0 + h_1$ i $p_2 = p_0 + h_2$, to (9) można napisać

$$1 + \frac{h_1}{p_0} = \frac{\left(1 + \frac{h_1}{p_0} \right)^\chi}{\left(1 + \frac{h_2}{p_0} \right)^\chi} \quad (10)$$

albo

$$\left(1 + \frac{h_1}{p_0} \right)^{\chi-1} = \left(1 + \frac{h_2}{p_0} \right)^\chi \quad (11)$$

Wykorzystując rozwinięcie wyrażenia $(1+x)^\alpha$ w szereg potęgowy $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots$ i biorąc pod uwagę liniową część rozwinięcia (x jest małe: $x = \frac{h_2}{p_0} < \frac{h_1}{p_0} \approx 10^{-2}$) otrzymujemy

$$1 + (\chi - 1) \frac{h_1}{p_0} = 1 + \frac{\chi \cdot h_2}{p_0} \quad (12)$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$\chi = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \quad (13)$$

VII. Przeprowadzenie pomiaru

1. Otworzyć kran K_1 . Ciśnienie powietrza w balonie szklanym wyrówna się z ciśnieniem atmosferycznym, wówczas poziom cieczy w obu ramionach manometru będzie taki sam.
2. Zamknąć kran K_1 , otworzyć kran K_2 i za pomocą pompki powoli zwiększać ciśnienie powietrza w balonie, tak by temperatura gazu nie wzrosła na skutek tarcia tłoka w pompce (dla pewności odczekać chwilę, aby temperatura wyrównała się z temperaturą otoczenia T_0). Odczytać różnicę poziomów h_1 cieczy w manometrze.
3. Otworzyć kran K_1 na krótką chwilę i zamknąć. Następnie poczekać, aby temperatura powietrza w balonie wyrównała się z temperaturą otoczenia; odczytać różnicę poziomów cieczy h_2 w manometrze.
4. Obliczyć wartość χ według wzoru (13).
5. Powtórzyć pomiary dziesięciokrotnie.

i	h_1	h_2	χ	$\chi_i - \bar{\chi}$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2$
1					
2					
⋮					
10					

6. Przeprowadzić rachunek błędów.

Obliczyć niepewność pomiaru Δs wartości $\bar{\chi}$ (niepewność średniej arytmetycznej):

$$\Delta s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\chi_i - \bar{\chi})^2}{n(n-1)}}$$

Dla poziomu ufności $\alpha = 0,95$ odczytać z tabeli rozkładu Studenta-Fishera (załączonej w tej instrukcji jak również w [1]) współczynnik $t(\alpha, k)$, pozwalający uwzględnić wpływ skończonej liczby pomiarów na wartość niepewności pomiarowej. Wynosi ona ostatecznie:

$$\Delta \bar{\chi} = t(\alpha, k) \cdot \Delta s$$

gdzie $k = n - 1$ jest liczbą stopni swobody.

Biorąc pod uwagę, że powietrze składa się głównie z azotu (78%) i tlenu (21%), porównać otrzymaną wartość χ z przewidywaną przez teorię.

Rozkład Studenta i Fishera¹

Wartości t_α spełniające równość $2 \int_0^{t_\alpha} S(t, k) dt = \alpha$

$k \backslash \alpha$	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	6,31	12,71	31,82	63,66	636,62
2	2,92	4,30	6,97	9,93	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
4	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
5	2,02	2,57	3,37	4,03	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,70	5,96
7	1,90	2,37	3,00	3,50	5,40
8	1,86	2,30	2,90	3,36	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,49
12	1,78	2,18	2,68	3,06	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
20	1,72	2,09	2,53	2,85	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,77
∞	1,65	1,96	2,33	2,58	3,29

Uwaga: k jest liczbą stopni swobody

¹ Tabela pochodzi z [1].