

## WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA LEPKOŚCI CIECZY Z PRAWA STOKESA

- I. Cel ćwiczenia:** obserwacja ruchu ciał stałych w ciekłym ośrodku lepkim, pomiar współczynnika lepkości gliceryny przy wykorzystaniu prawa Stokesa.
- II. Przyrządy:** wysoki cylinder o średnicy kilku centymetrów napełniony gliceryną, waga laboratoryjna, śruba mikrometryczna, suwmiarka, termometr, areometr, stoper.
- III. Literatura:** [1] H. Hofmokl, A. Zawadzki – Laboratorium fizyczne,  
[2] J. L. Kacperski - I pracownia fizyczna ,  
[3] F. Nozdriew (praca zbiorowa) – Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki ogólnej.  
[4] T. Rewaja (praca zbiorowa) – Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki na politechnice

### IV. Wprowadzenie

We wszystkich cieczach rzeczywistych przy przesuwaniu się jednych warstw względem drugich powstają siły tarcia. Od strony warstwy poruszającej się szybciej działa na warstwę poruszającą się wolniej siła przyśpieszająca. Natomiast od strony warstwy poruszającej się wolniej na warstwę szybszą działa siła hamująca. Siły te działają stycznie do powierzchni warstw.

Podczas ruchu ciała w cieczy, na skutek występowania sił międzycząsteczkowych, przylega do jego powierzchni warstwa cieczy i jest ona przez tę powierzchnię unoszona. Następna warstwa jest unoszona przez ciało ale już z mniejszą prędkością. Tak więc podczas ruchu ciała w cieczy powstają w niej siły tarcia wewnętrznych zwane inaczej siłami lepkości.

W doświadczeniu wyznaczymy współczynnik lepkości cieczy charakteryzujący jej lepkość. Wykorzystamy w tym celu wzór Stokesa, opisujący opór jakiego ze strony ośrodka lepkiego doznaje poruszająca się kulka. Opór stawiany przez ośrodek jest tym większy, im większe są rozmiary kulki i jej prędkość oraz lepkość ośrodka. Wielkość kulki określa jednoznacznie jej promień, a miarą lepkości jest tzw. współczynnik lepkości dynamicznej  $\eta$ , który definiuje się w oparciu o wzór Newtona

$$f = \eta \frac{dv}{dy} \quad (1)$$

gdzie  $f$  oznacza siłę działającą na jednostkę powierzchni,  $\frac{dv}{dy}$  jest gradientem prędkości.

Współczynnik  $\eta$  jest równy liczbowo takiej sile działającej na jednostkę powierzchni, która jest niezbędna do utrzymania jednostkowej różnicy prędkości pomiędzy dwiema równoległymi warstwami cieczy, odległymi od siebie o jednostkę długości.

Jednostka współczynnika lepkości (bez nazwy) ma w układzie SI wymiar

$$[\eta] = [f] \left[ \frac{dy}{dv} \right] = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s} = \text{m}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \quad (2)$$

Dawniej używaną jednostką w układzie CGS (centymetr · gram · sekunda) był puaz P (niekiedy używany również obecnie)

$$1\text{P} = 10^{-1} \text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}$$

Lepkość dynamiczna odniesiona do gęstości cieczy  $\rho$  nazywa się lepkością kinematyczną i jest oznaczana symbolem  $\nu$

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Jednostką lepkości kinematycznej w układzie SI jest  $[\nu] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . We wspomnianym układzie CGS jednostką był stokes:  $1\text{St} = \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Jednostki te pozostają ze sobą w relacji

$$1\text{St} = 10^{-4} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Współczynnik lepkości wyznaczamy za pomocą przyrządów zwanych wiskozymetrami. Pozwalają one wyznaczyć również zależność współczynnika lepkości od temperatury poprzez możliwość termostatowania cylindra pomiarowego. Ze wzrostem temperatury lepkość wszystkich cieczy maleje (z wyjątkiem wody w zakresie temperatur 2 – 4 °C). Zależność współczynnika lepkości od temperatury opisuje funkcja wykładnicza

$$\eta = Ae^{\frac{B}{T}}$$

gdzie: A, B – wielkości charakterystyczne dla danej cieczy

Tabela 1

Wielkości charakteryzujące ruch w ośrodku lepkim

Wielkości fizyczne	Oznaczenia	Wymiary
Opór stawiany przez ośrodek	$F_s$	$\text{LMT}^{-2}$
Lepkość ośrodka	$\eta$	$\text{L}^{-1}\text{MT}^{-1}$
Prędkość kulki	$v$	$\text{LT}^{-1}$
Promień kulki	$r$	$\text{L}$

W tab.1 zamieszczono informacje o wielkościach określających opór ośrodka. Przez L oznaczono wymiar długości, przez M wymiar masy a przez T wymiar czasu.

Nasze odczucie i obserwacje doświadczalne mówią nam, że „im większe” są promień i prędkość kulki oraz lepkość ośrodka, tym „większy” jest opór stawiany kulce. Zapiszemy to w postaci potęgowej

$$F_s = C \eta^a v^b r^c \quad (3)$$

gdzie C jest stałą, a, b, c, nieznanymi wykładnikami. Znajdziemy je wykorzystując tzw. analizę wymiarową. W dowolnym równaniu fizycznym wymiary prawej i lewej strony muszą być jednakowe a to oznacza, że w równaniu (3) musi być  $[F_s] = [\eta^a v^b r^c]$

Podstawiając w zależności (3) znane wymiary poszczególnych wielkości fizycznych dostaniemy

$$\text{LMT}^{-2} = (\text{L}^{-1}\text{MT}^{-1})^a (\text{LT}^{-1})^b \text{L}^c = \text{L}^{-a+b+c} \text{M}^a \text{T}^{-a-b} \quad (4)$$

Z tego co powiedziano wyżej wynika, że jednakowe muszą być wykładniki przy symbolach długości, masy i czasu po obu stronach równania (4).

Porównanie wykładników prowadzi do układu trzech równań liniowych

$$\begin{cases} 1 = -a + b + c \\ 1 = a \\ -2 = -a - b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Widać, że siła Stokesa jest liniowo związana z prędkością, promieniem kuli i lepkością ośrodka:

$$F_s = C \eta v r = 6\pi\eta v r \quad (5)$$

gdzie stała  $C$  wynosi  $6\pi$ .

## V. Metoda pomiarów

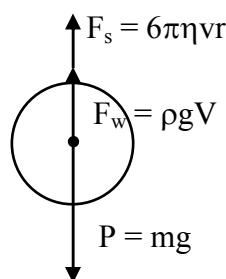
Pomiar współczynnika lepkości wykonuje się przez opuszczenie do badanej cieczy kulki, wykonanej z materiału o gęstości większej od gęstości cieczy i zmierzenie prędkości jej opadania.

Na kulkę spadającą w ośrodku lepkiem działają 3 siły:

- 1) siła ciężkości kulki działająca w dół  $m \cdot g$ ,
- 2) siła parcia do góry  $V \cdot \rho \cdot g$ ,
- 3) opór ośrodka, który według prawa Stokesa wynosi

$$F_s = 6\pi \eta v r.$$

gdzie  $m$  oznacza masę kulki spadającej,  $V$  – objętość kulki  $\frac{4}{3} \pi r^3$ ,  $\rho$  – gęstość cieczy,  $g$  – przyspieszenie ziemskie,  $r$  – promień kulki,  $v$  – prędkość kulki poruszającej się ruchem jednostajnym,  $\eta$  – współczynnik lepkości cieczy, zależny tylko od rodzaju cieczy i jej temperatury.



**Rys.1** Siły działające na ciało poruszające się w ośrodku lepkiem.

Po osiągnięciu przez kulkę odpowiednio dużej prędkości „granicznej”, siły te zrównoważą się i dalszy ruch kulki będzie ruchem jednostajnym. Wówczas

$$F_s + F_w - P = 0 \quad (6)$$

$$6\pi\eta v r + V\rho g - mg = 0$$

$$6\pi\eta v r + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_k g = 0$$

$$6\pi\eta v r = \frac{4}{3} \pi r^3 g (\rho_k - \rho) \quad (7)$$

Podstawiając  $v = \frac{h}{t}$ , gdzie  $h$  jest drogą przebytą ruchem jednostajnym w czasie  $t$  otrzymamy

$$\eta = \frac{2r^2 g(\rho_k - \rho)t}{9h} \quad (8)$$

Wzór ten stosuje się wówczas, gdy kulka spada w cieczy znajdującej się w naczyniu o tak dużych wymiarach, że można pominąć wpływ ścian na ruch kulki. W warunkach zaś laboratoryjnych, jeśli kulka spada w cylindrze o promieniu  $R$ , wprowadza się poprawkę „na wpływ ścianek”. Poprawka ta według wzoru Ladenburga wynosi

$$v_0 = v \left( 1 + k \frac{r}{R} \right) \quad (9)$$

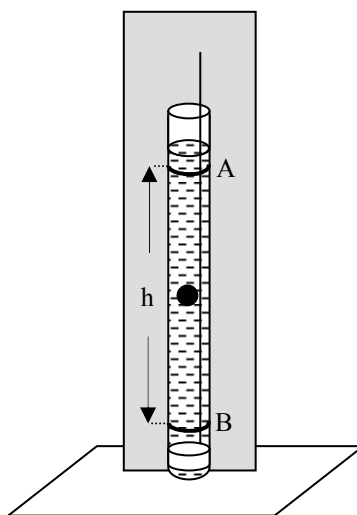
gdzie  $v_0$  oznacza prędkość spadającej kulki w naczyniu o nieskończonych rozmiarach,  $v$  prędkość mierzona,  $r$  promień kulki,  $R$  promień cylindra,  $k$  stałą ( $k = 2,4$ ).

Po uwzględnieniu poprawki (9) otrzymujemy

$$\eta = \frac{2r^2 g(\rho_k - \rho)t}{9h} \frac{1}{1 + 2,4 \frac{r}{R}} \quad (10)$$

## VI. Aparatura pomiarowa

Wysoki cylinder o średnicy kilku centymetrów napełniony jest gliceryną. Na cylindrze znajdują się dwa znaczniki: górny A i dolny B (odległość  $AB = h$ ), pomiędzy którymi mierzymy czas spadania kulek. Znacznik górny jest w dostatecznej odległości poniżej powierzchni cieczy, aby w chwili pomiarów kulka poruszała się ruchem jednostajnym. W środku cylindra znajduje się pojemnik z uchwytem do wyciągania kulek z gliceryny.



Rys.2 Schemat aparatury pomiarowej

**Pomiary**

1. Wyznaczyć za pomocą suwmiarki średnicę wewnętrzną  $D$  cylindra i znaleźć jego promień  $R$ .
2. Wyznaczyć masę  $m_1$  10-ciu jednakowych kulek. Obliczyć masę  $m$  jednej kulki.
3. Wyznaczyć średnicę  $d$  każdej z 10-ciu kulek za pomocą śruby mikrometrycznej. Obliczyć wartość średnią  $\bar{d}$  oraz promień kulki  $\bar{r}$ .
4. Obliczyć gęstość  $\rho_k$  materiału, z którego wykonano kulki.
5. Zmierzyć odległość  $h$  od znacznika A do znacznika B za pomocą miarki milimetrowej.
6. Wyznaczyć sekundomierzem czas  $t$  przelotu odległości  $h$  dla każdej z 10-ciu kulek. Obliczyć wartość średnią  $\bar{t}$ .
7. Wyznaczyć areometrem gęstość cieczy  $\rho$ .
8. Zmierzyć termometrem temperaturę gliceryny.
9. Obliczyć współczynnik lepkości cieczy  $\eta$  w danej temperaturze.
10. Przeprowadzić rachunek błędów.
11. Ocenic  $\Delta r = \Delta d/2$ ,  $\Delta m = \Delta m_1/10$ ,  $\Delta h$ ,  $\Delta \rho$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta R = \Delta D/2$ , w oparciu o znajomość dokładności użytych przyrządów. Wykorzystując procedurę obliczania niepewności maksymalnej obliczyć niepewność  $\Delta \rho_k$

$$\Delta \rho_k = \pm \rho_k \left( \frac{\Delta m}{m} + \frac{3\Delta r}{r} \right)$$

12. Obliczyć niepewność maksymalną  $\Delta \eta$

$$\Delta \eta = \pm \eta \left( \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta r}{r} + \frac{2,4}{1 + 2,4r/R} \frac{\Delta r}{R} + \frac{2,4}{2,4 + r/R} \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta \rho_k}{\rho_k - \rho} + \frac{\Delta \rho}{\rho_k - \rho} \right)$$