Katedra Fizyki Ciała Stałego Uniwersytetu Łódzkiego

Ćwiczenie 2

Badanie funkcji korelacji w przebiegach elektrycznych.

<u>Cel ćwiczenia:</u> Celem ćwiczenia jest zbadanie funkcji korelacji w okresowych sygnałach elektrycznych, szumie szerokopasmowym oraz wyznaczanie tą metodą współczynnika dobroci układów rezonansowych.

<u>Plan prac badawczych</u>

1. Pomiar liniowości wzmacniacza dla sygnału sinusoidalnego o wybranych częstotliwościach (Aneks - schemat 1).
2. Pomiar funkcji korelacji sygnału sinusoidalnego dla wybranych częstotliwości w funkcji czasów opóźnienia od τ =1μs do τ =30 μs (Aneks - schemat 3).
3. Pomiar funkcji korelacji sygnału piłokształtnego dla wybranych częstotliwości w funkcji czasów opóźnienia od τ =1μs do τ =30 μs (Aneks - schemat 3).
4. Pomiar funkcji korelacji szumów dla filtrów od ω_1 do ω_5 w funkcji czasów opóźnienia od τ =1μs do τ =30 μs (Aneks – schemat 2).
5. Pomiar funkcji korelacji sygnału szumu z nałożonym sygnałem harmonicznym dla filtrów od ω_1 do ω_5 w funkcji czasów opóźnienia od τ =1μs do τ =30 μs dla wybranych częstotliwości modulującego sygnału harmonicznego (Aneks – schemat 6)
6. Pomiar charakterystyk częstotliwościowych filtrów od ω_1 do ω_5 celem wyznaczenia dobroci tych filtrów (Aneks – schemat 4).
7. Wyznaczanie dwiema metodami (z funkcji korelacji i charakterystyk częstotliwościowych) dobroci filtrów od ω_1 do ω_5.
8. Pomiar stałej czasowej filtru RC metodą funkcji korelacji (Aneks - schemat 5).

Wstęp teoretyczny

Procesem losowym nazywamy zbiór wszystkich funkcji losowych stanowiących realizacje danego zjawiska losowego. Funkcja losowa (lub realizacja) jest to pojedyncza funkcja czasu opisująca zjawisko losowe. Przy skończonym przedziale czasu funkcję losową można nazwać sygnałem obserwowanym.

Procesy losowe dzielimy na procesy stacjonarne (które są przedmiotem ćwiczenia) oraz niestacjonarne.

Procesy stacjonarne to takie, dla których zmiana chwili początkowej nie jest jednoznaczna ze zmianą statystycznych charakterystyk procesu. Dwa procesy stacjonarne nazywamy stacjonarnie powiązanymi, gdy ich łączne własności statystyczne nie zmieniają się przy przesunięciu chwili początkowej. Dla takich procesów współczynnik korelacji zależny jest jedynie od różnicy momentów czasowych.

Ważną własnością, często wykorzystywaną przy badaniu procesów losowych jest ich ergodyczność. Proces stacjonarny jest ergodyczny, jeśli średnia po czasie tej funkcji procesu losowego równa się średniej po realizacji dowolnej funkcji procesu losowego. Statystyczne parametry każdego stacjonarnego ergodycznego procesu **X** można określić na podstawie jednej realizacji, zastępując uśrednienie po zespole statystycznym uśrednieniem po dostatecznie długim czasie.

Momentem n-tego rzędu procesu losowego dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa $\mathbf{f_1}$ określonej dla dowolnego czasu **t** nazywamy wielkość $\boldsymbol{\alpha_n}$ opisaną zależnością:

$$\alpha_n(t) = < x^n >$$

Momentem centralnym procesu losowego nazywamy:

$$\mu_n(t) = < (x - \alpha_1)^n >$$

Dla opisu zbioru dwóch wielkości losowych wprowadza się dwuwymiarową funkcję rozkładu:

$$F_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = P[x(t_1) \le x_1, x(t_2) \le x_2],$$

gdzie **P** jest prawdopodobieństwem że wielkość losowa $\mathbf{x(t_1)}$ osiąga wartości niewiększe od ustalonego $\mathbf{x_1}$ oraz, że wielkość losowa $\mathbf{x(t_2)}$ osiąga wartości niewiększe od ustalonego $\mathbf{x_2}$.
Przez gęstość prawdopodobieństwa rozumiemy:

$$f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

momenty określamy zależnością:

$$\alpha_{ik} = \langle x^i(t_1)x^k(t_2) \rangle ,$$

a momenty centralne:

$$\mu_{ik} = \langle [x(t_1) - \alpha_1(t_1)]^i [x(t_2) - \alpha_2(t_2)]^k \rangle$$

Wyrażenie na α_{11} charakteryzuje korelację wielkości losowych x_1 i x_2:

$$\alpha_{11}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t_1)x_2(t_2)\, f_2(x_1,t_1;x_2,t_2)dx_1dx_2 ,$$

a funkcją korelacji procesu nazywa się wyrażenie:

$$\mu_{11}(t_1,t_2) = \langle [x(t_1) - \alpha_1(t_1)] \cdot [x(t_2) - \alpha_2(t_2)] \rangle$$

często oznacza się ją $\boldsymbol{\varphi_{xx}(t_1, t_2)}$ i nazywa funkcja autokorelacji.

Jeśli rozpatrujemy statystyczne własności dwóch procesów **X** i **Y**, zachodzących jednocześnie lub rozpatrywanych wspólnie to znormalizowany centralny moment jednowymiarowej funkcji rozkładu nazywa się współczynnikiem korelacji wzajemnej:

$$\rho_{xy} = \frac{\varphi_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} ,$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}$ jest odchyleniem standardowym procesu losowego.

Metodyka pomiarowa

W ćwiczeniu rozpatrujemy dwa procesy losowe **X** i **Y**. Punkty $\boldsymbol{x_i(t\{_1), y_i(t_2)\}}$ odpowiadające realizacji procesów, nazywane punktami obrazującymi, nanosimy na płaszczyznę **x0y** i otrzymujemy tzw. diagram rozrzutu. Określony, skończony obszar dookoła punktu diagramu rozrzutu może zawierać nieskończoną ilość punktów obrazujących. Każde takie otoczenie będziemy charakteryzować stosunkiem liczby punktów obrazujących, które trafiły w wybrany obszar do ogólnej liczby punktów obrazujących diagramu rozrzutu.

W przypadku gdy $\boldsymbol{\rho_{xy} = 1}$ to punkty obrazujące układają się w pobliżu prostej:

$$y = \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} x + \left(\langle y \rangle - \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \langle x \rangle \right)$$

przy czym średnie kwadratowe odchylenie równe jest zeru. Im procesy są silniej skorelowane, tym więcej punktów grupuje się w pobliżu prostej.

Niech współczynnik korelacji badanych procesów **X** i **Y** równa się $\boldsymbol{\rho_{xy}}$. Utwórzmy proces **Z = X + αY** i rozpatrzmy diagram rozrzutu procesów **Z** i procesów **Y**. Dla prostoty przyjmiemy, że **<x>=<y>=0** a więc i **<z>=0**.

Wyliczamy w oparciu o wcześniejsze wzory współczynnik korelacji procesów **Z** i **Y**. Po dokonaniu przekształceń otrzymujemy:

$$\rho_{zy} = \frac{\rho_{xy} + \alpha}{\sqrt{1 + 2\alpha\rho_{xy} + \alpha^2}}$$

Widać stąd, że przez odpowiedni dobór współczynnika α można doprowadzić do tego, żeby procesy Z i Y były nieskorelowane ($\rho_{zy} = 0$) wtedy:

$$\alpha = -\rho_{xy}.$$

Na tym stwierdzeniu opiera się metoda stosowana w tym ćwiczeniu. W celu obserwacji diagramu rozrzutu wykorzystuje się ekran oscyloskopu. Na płyty odchylenia poziomego podaje się napięcie odpowiadające procesowi **Y**, a odchylenia pionowego – napięcie odpowiadające procesowi **Z = X + αY**. Napięcie to formuje się w specjalnym układzie, a przez zmianę (pokrętłem helipotu) współczynnika **α** doprowadza się do dekorelacji procesów **Z** i **Y**, co następuje gdy osie elipsy pokrywają się z osiami 0x i 0y ekranu oscyloskopu.

Wtedy:

$$\rho_{xy} = -\alpha$$

Literatura

[1] J.S.Bendat, A.G.Piersol „Metody analizy i pomiarów sygnałów losowych" PWN, Warszawa 1976

[2] L.Niemcewicz, „Radiotechnika" Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1971

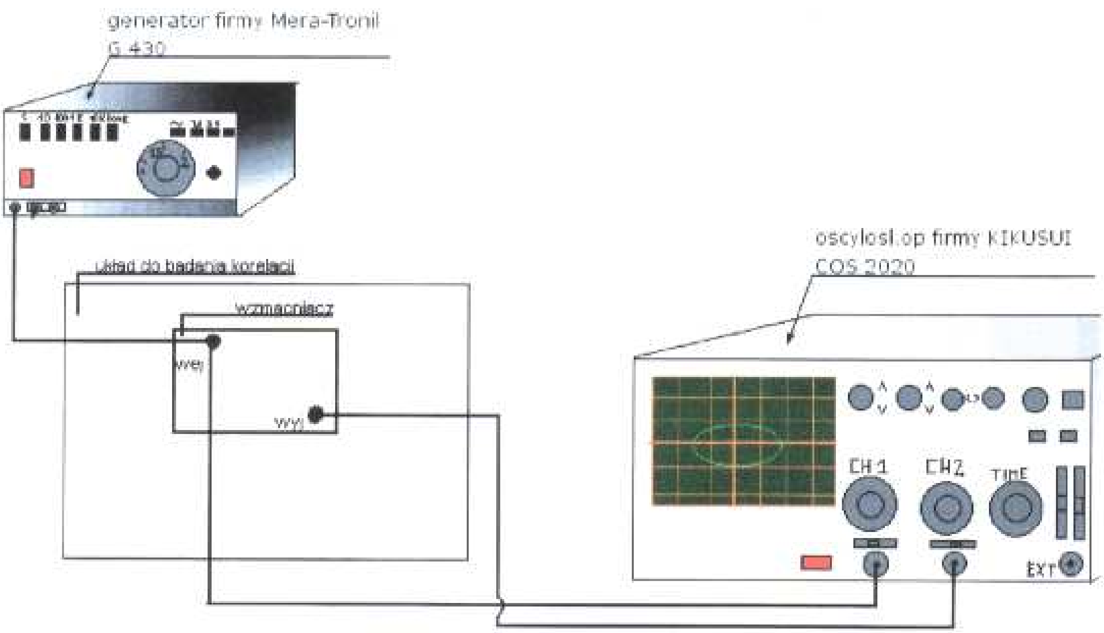
[3] R.Kurdziel, „Elektrotechnika część 1", Wydawnictwo Szkolna i Pedagogiczne, Warszawa 1995

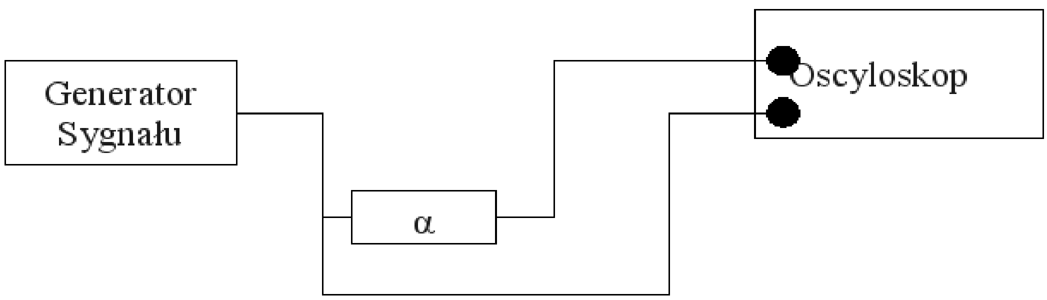
[4] M.Pilawski, „Pracowania elektryczna", Wydawnictwo Szkolna i Pedagogiczne, Warszawa

Aneks - Schematy pomiarowe

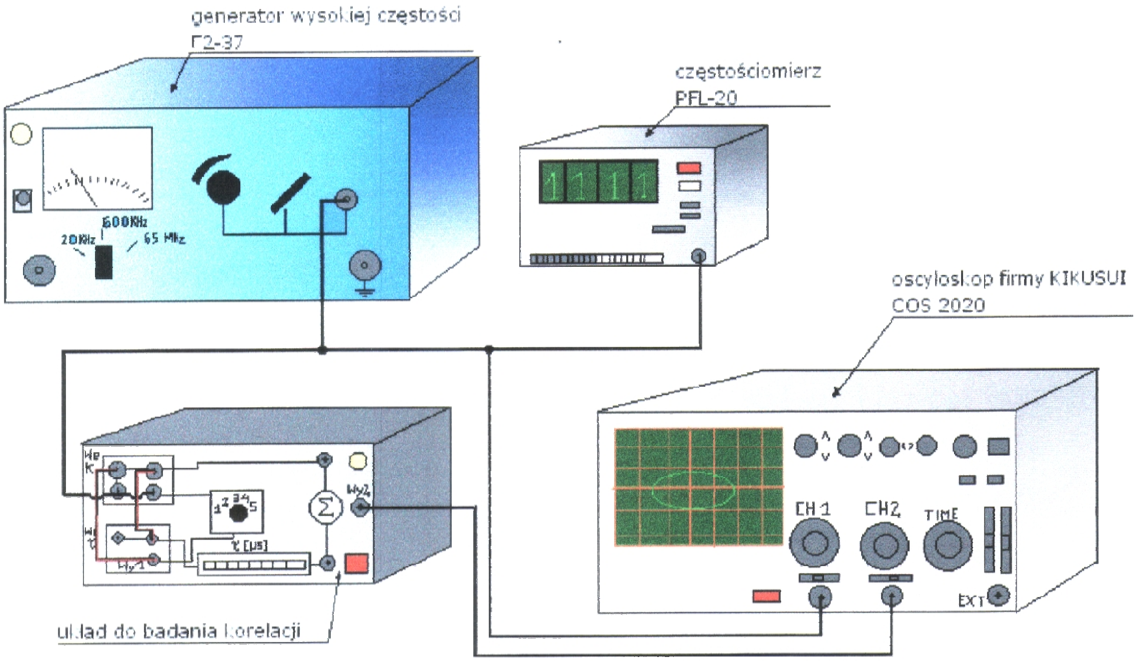
Schemat 1. Układ do badania liniowości wzmacniacza *(badamy wzmocnienie układu U_{wy}/U_{we} w funkcji położenia pokrętła helipotu, określonego liczbą działek).*

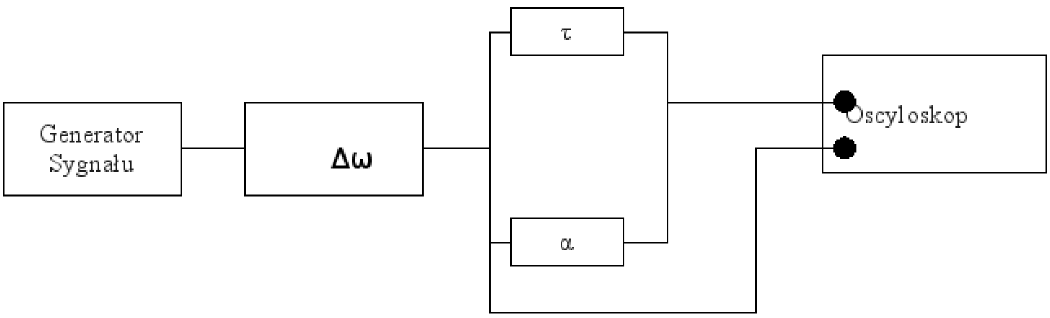
Zastosowany w korelatorze wzmacniacz posiada stały współczynnik wzmocnienia w zakresie częstotliwości od 20 Hz do 350 kHz. Jego współczynnik wzmocnienia zmienia się za pomocą helipotu w granicach od -1 do +1.





Schemat 2. Układ do badania korelacji szumów (*badamy dla wszystkich filtrów ω, wartość ρ (τ), sprowadzając pokrętłem helipotu elipsę diagramu rozrzutu na osie główne ekranu oscyloskopu*).





Wyznaczanie dobroci Q filtrów rezonansowych ω_1 do ω_5 metodą funkcji korelacji:

$$\ln \kappa = \frac{\pi}{Q\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

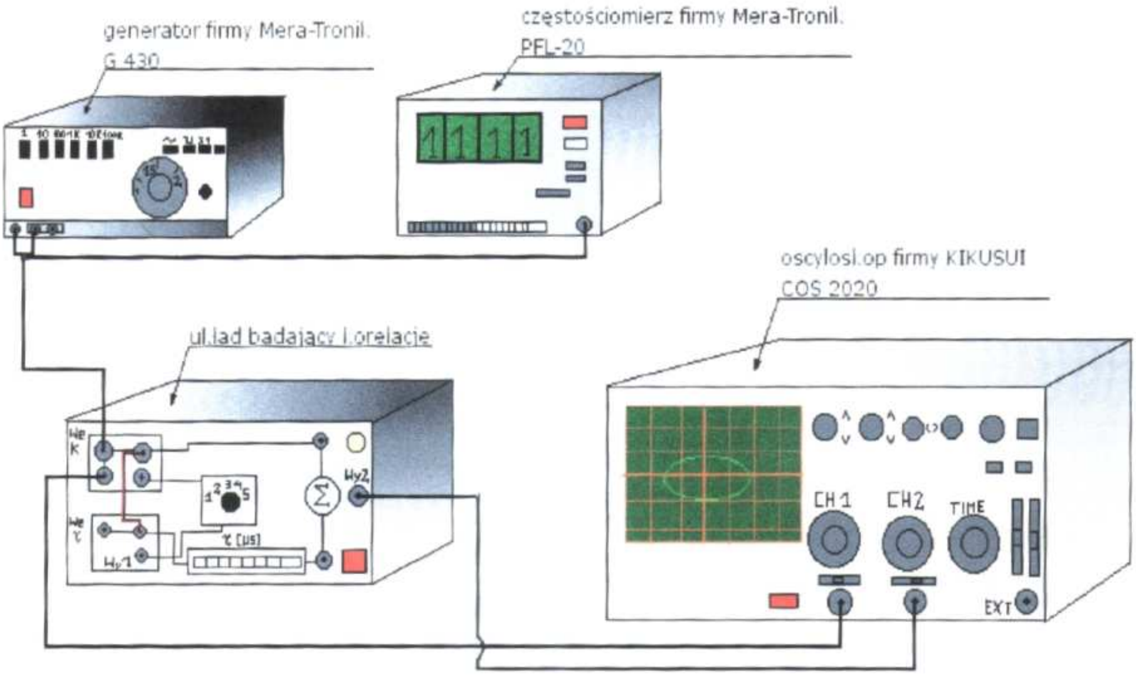
gdzie:

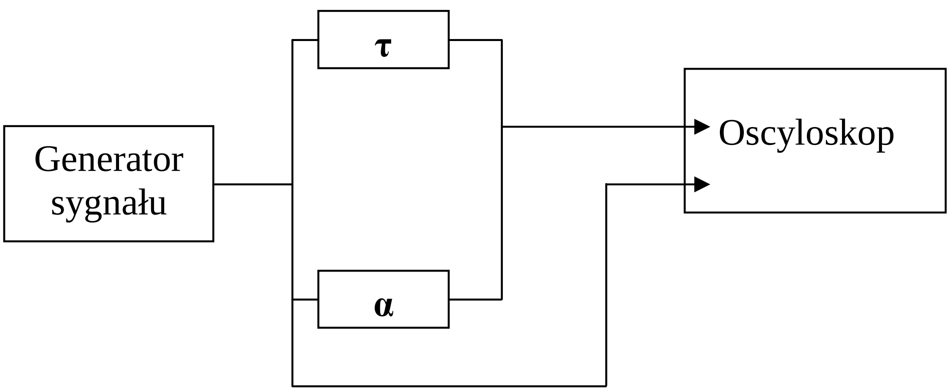
$$\kappa = \frac{\rho_{max,i}}{\rho_{max,i+1}} = \frac{\rho_{min,i}}{\rho_{min,i+1}}$$

oznacza stosunki kolejnych maksimów i minimów krzywej $\rho(\tau)$ mierzonych dla poszczególnych filtru od ω_1 do ω_5.

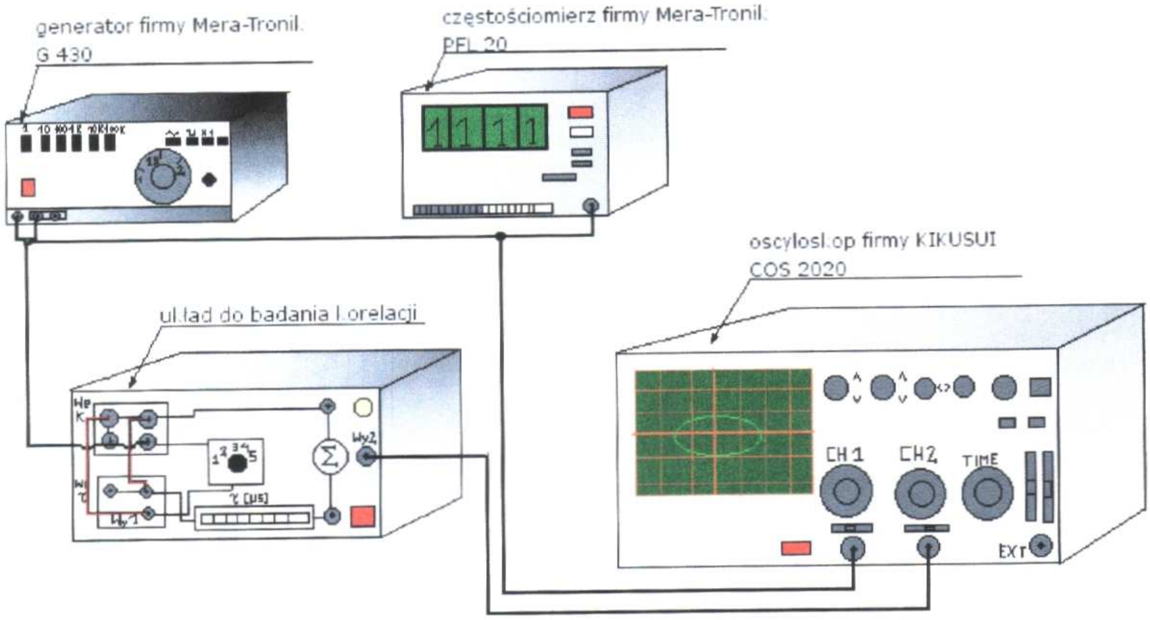
Schemat 3. Układ do badania korelacji sygnału sinusoidalnego i piłokształtnego, *(badamy wartość $\rho(\tau)$, sprowadzając pokrętłem helipotu elipsę diagramu rozrzutu na osie główne ekranu oscyloskopu).*

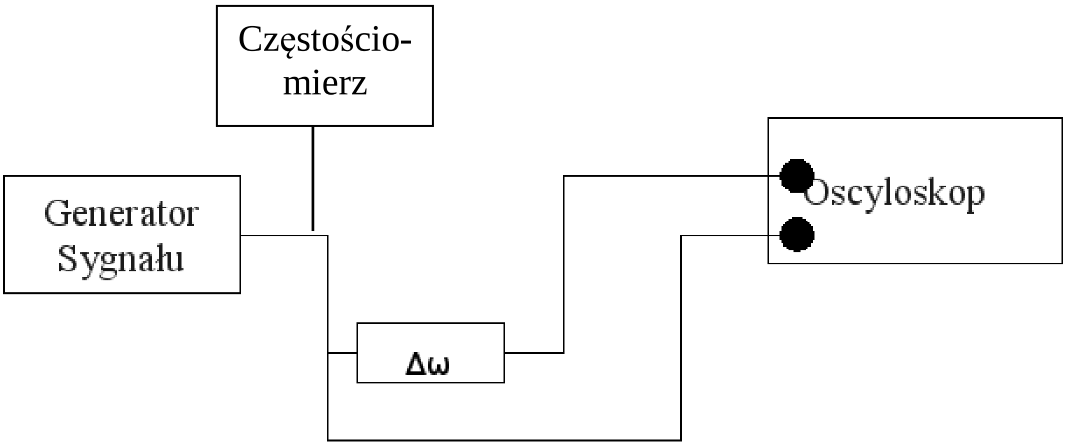
Amplitudę sygnału wyjściowego z generatora wybieramy ≤ 2V, a częstotliwość z przedziału 10 kHz do 150 kHz





Schemat 4. Układ do wyznaczania krzywych rezonansowych *(badamy wzmocnienie układu U_{wy}/U_{we} w funkcji częstotliwości sygnału wejściowego).*





Wyznaczanie dobroci Q filtrów rezonansowych ω_1 do ω_5 na podstawie charakterystyk częstotliwościowych (krzywe rezonansowe):

$$Q = \frac{f_0^M}{|f_2 - f_1|} \qquad f_0^M = \frac{\varpi_0}{2\pi}$$

f_0^M - częstotliwość rezonansowa, Q – dobroć, ω_0 – częstość

f1, f2 – współrzędne punktów przecięcia krzywej K(f) z prostą $K_{wy} = \frac{K_{wy.\max}}{\sqrt{2}}$

Schemat 5. Wyznaczanie stałej czasowej obwodu RC

Układ połączeń jak w schemacie 2. Stałą czasową wyznaczamy dla filtru ω_1 lub ω_5 (przełącznik filtrów w położeniu 1 lub 5). Dla każdej wartości τ położenie, przy którym osiąga się dekorelację sygnałów Z i Y określa się minimum 3 razy. Z otrzymanych wartości znajduje się wartość średnią $< \alpha >$, dla danego τ, równą wartości $-\rho(\tau)$.

Korzystając z wyrażenia:

$$\rho\ (\tau) = \exp - \tau/\tau_o \qquad \text{gdzie } \tau_o \text{ – stała czasowa}$$

i logarytmując stronami otrzymujemy równanie:

$$\ln \rho\ (\tau) = - \tau/\tau_o$$

z którego łatwo obliczyć, metodą najmniejszych kwadratów szukaną, wartość stałej czasowej (bądź metodą wykreślną na papierze logarytmicznym).

Schemat 6. Pomiar korelacji w sygnale szumu z nałożonym sygnałem harmonicznym.

Układ połączeń jak w schemacie 2, z tym, że dołączamy (przez odpowiedni układ mieszacza) do wyjścia generatora szumów, generator sygnału harmonicznego. Dalsze pomiary jak w punkcie 2 planu prac badawczych